1. Elektromagnetické pole

Elektromagnetické pole je časově a prostorově závislé vektorové pole. Jeho chování lze popsat známými Maxwellovými rovnicemi

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t) &= \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

kde $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D}, \mathbf{B}$ jsou postupně vektory intenzity elektrického a magnetického pole a vektory elektrické a magnetické indukce, $\mathbf{J}$ a ρ je vektor proudové hustoty a (objemová) hustota elektrického náboje. Jejich fyzikální jednotky jsou postupně V/m, A/m, C/m^2, T, A/m^2 a C/m^3 . Aplikací operátoru divergence na druhou Maxwellovu rovnici získáme po dosazení z rovnice pro divergenci $\mathbf{D}$ *rovnici kontinuity (zachování náboje)*:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

Mezi vektory intenzity pole a vektory elektrické a magnetické indukce platí obecně poměrně složité „materiálové" vztahy. Omezíme-li se zpočátku na lineární nedisperzní nechirální prostředí (některé z těchto pojmů budou objasněny dále), vztahy mezi vektory pole můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H} \quad , \tag{3}$$

kde $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}_r$ je tenzor elektrické permitivity prostředí, $\boldsymbol{\mu} = \mu_0 \boldsymbol{\mu}_r$ je tenzor magnetické permeability prostředí, $\varepsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12}$ F/m je permitivita a $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m permeabilita vakua, a $\boldsymbol{\varepsilon}_r$, $\boldsymbol{\mu}_r$ jsou (bezrozměrné) tenzory relativní permitivity a permeability prostředí.

Materiálové vztahy (3) snižují počet nezávisle proměnných veličin v elektromagnetickém poli na 6 složek, např. vektorů $\mathbf{E}$ a $\mathbf{H}$. Ty jsou však spolu dále svázány rovnicemi (1). Poněvadž za zdroje elektromagnetického pole lze obecně považovat proudovou hustotu $\mathbf{J}$ a hustotu náboje ρ, což jsou čtyři nezávislé (skalární) funkce, lze očekávat, že obecné elektromagnetické pole je možno popsat čtveřicí nezávislých funkcí. Takovou čtveřici představuje např. *vektorový a skalární potenciál*. Čtvrtou z Maxwellových rovnic (1) bude automaticky splněna, zavedeme-li *vektorový potenciál* $\mathbf{A}$ vztahem

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad . \tag{4}$$

Prvou Maxwellovu rovnici pak můžeme přepsat do tvaru $\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \mathbf{0}$.

Tato rovnice bude rovněž identicky splněna, bude-li se závorka rovnat gradientu nějaké skalární funkce. Proto se zavádí *skalární potenciál* ϕ tak, že platí

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi . \tag{5}$$

Poněvadž proudová hustota a hustota náboje jako zdroje elektromagnetického pole jsou spolu vzájemně svázány rovnicí kontinuity (2), můžeme požadovat, aby skalární a vektorový potenciál byly spolu rovněž vázány určitou (skalární) podmínkou. Předpokládejme, že prostředí je *izotropní a nedisperzní*, tj. permitivita ε a permeabilita μ jsou skalární funkce, které nezávisejí na čase. Upravme výraz

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \mu \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} + \mu \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ &= \mu \mathbf{J} + \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mu \mathbf{J} - \mu \varepsilon \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{6}$$

tím, že zavedeme mezi skalárním a vektorovým potenciálem vztah, tzv. *Lorentzovu kalibrační podmínku*

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 . \tag{7}$$

Jejím dosazením do vztahu (6) získáme pro vektorový potenciál *Helmholtzovu vlnovou rovnici*

$$\Delta \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} . \tag{8}$$

Dosazením výrazu (5) pro $\mathbf{E}$ do třetí Maxwellovy rovnice (1) dostaneme s použitím Lorentzovy podmínky $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} = \nabla \cdot \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\Delta \phi + \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$, neboli

$$\Delta \phi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} , \tag{9}$$

což je Helmholtzova vlnová rovnice pro skalární potenciál.

Časově harmonicky proměnné pole

V další části se budeme až na výjimky zabývat elektromagnetickým polem, které má harmonickou časovou závislost. To znamená, že všechny veličiny mají časovou závislost v obecném tvaru $f(\mathbf{r}, t) = f_0(\mathbf{r}) \cos\left(\omega t - \theta \right)$. Pro takové závislosti je výhodné pracovat s *komplexní symbolikou*: místo reálné funkce $f(\mathbf{r},t)$ zavedeme *komplexní amplitudu* (*fázor*) $F(\mathbf{r})$ vztahem

$$F(\mathbf{r}) = f_0(\mathbf{r})\exp(i\theta)\,; \tag{10}$$

kde *i* je imaginární jednotka. Pak zřejmě platí

$$f(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\Big\{F(\mathbf{r})\exp\Big(-i\omega t\Big)\Big\}. \tag{11}$$

(Stejně dobře můžeme zavést komplexní amplitudu vztahem $F(\mathbf{r}) = f_0(\mathbf{r})\exp(-j\theta)$; původní funkce je pak dána vztahem $f(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\Big\{F(\mathbf{r})\exp(j\omega t)\Big\}$. Pro rozlišení jsme zde použili pro imaginární jednotku označení *j*. V literatuře se používá *obojí přístup*, je proto třeba si vždy uvědomit, kterou z konvencí autor používá. Zhruba lze říci, že symbolika založená na časové závislosti $\exp\Big(j\omega t\Big)$ se používá převážně v elektronice a elektrotechnice, ve fyzikální literatuře převažuje používání závislosti $\exp\Big(-i\omega t\Big)$. Často se však lze setkat s výjimkami.)

Výhoda komplexní symboliky spočívá v tom, že komplexní amplituda již v sobě podle (10) nese informaci o fázi. Navíc pro časovou derivaci platí

$$\frac{\partial}{\partial t}f(\mathbf{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}\Big\{F(\mathbf{r})\exp\Big(-i\omega t\Big)\Big\} = \mathrm{Re}\Big\{-i\omega F(\mathbf{r})\exp\Big(-i\omega t\Big)\Big\}; \tag{12}$$

časová derivace se tedy projeví prostým *vynásobením komplexní amplitudy* faktorem $-i\omega$.

Pro vektory elektromagnetického pole v komplexní symbolice budeme používat značení *stojatým tučným písmem* podle následujících vztahů:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\mathsf{E}}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\{\mathbf{E}(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)\} = |\mathbf{E}_0(\mathbf{r})|\cos(\omega t-\theta_E), \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = |\mathbf{E}(\mathbf{r})|\exp[i\theta_E(\mathbf{r})]\\
&\boldsymbol{\mathsf{H}}\;(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\{\mathbf{H}(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)\} = |\mathbf{H}_0(\mathbf{r})|\cos(\omega t-\theta_H), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = |\mathbf{H}(\mathbf{r})|\exp[i\theta_H(\mathbf{r})]
\end{aligned}$$
(13)

Je třeba si však uvědomit, že komplexní symboliku můžeme používat bez zvláštních opatření pouze pro lineární systémy a ve výrazech *lineárně závislých* na veličinách pole. Toto „zvláštní opatření" vyžaduje např. výraz pro výkonový tok v elektromagnetickém poli (Poyntingův vektor) $\boldsymbol{\mathsf{S}} = \boldsymbol{\mathsf{E}}\times\boldsymbol{\mathsf{H}}$. Pro *časovou střední hodnotu* Poyntingova vektoru v poli s časově harmonickým průběhem zřejmě platí

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} = \bar{\boldsymbol{\mathsf{S}}} &= \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{\mathsf{E}}\times\boldsymbol{\mathsf{H}}\quad \mathrm{d}t = \mathbf{E}_0\times\mathbf{H}_0\frac{1}{T}\int_0^T\cos\Big(\omega t-\theta_E\Big)\cos\Big(\omega t-\theta_H\Big)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}\mathbf{E}_0\times\mathbf{H}_0\cos(\theta_E-\theta_H) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\Big\{\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\Big\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\Big\{\mathbf{E}^*\times\mathbf{H}\Big\}
\end{aligned} \tag{14}$$

kde $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ jsou *amplitudy*, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\exp(i\theta_E), \mathbf{H} = \mathbf{H}_0\exp(i\theta_H)$ jsou *komplexní amplitudy* vektorů pole, a hvězdička označuje komplexní sdružení.

Maxwellovy rovnice, vlnové rovnice a vyjádření vektorů pole pomocí skalárního a vektorového potenciálu v komplexní symbolice pro harmonicky časově proměnné pole mají tvar

$$\begin{aligned} \nabla\times\mathbf{E} &= i\omega\mathbf{B} & \nabla\times\mathbf{H} &= -i\omega\mathbf{D}+\mathbf{J} \\ \nabla\cdot\mathbf{D} &= \rho & \nabla\cdot\mathbf{B} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\Delta\mathbf{A}+k^2\mathbf{A}=-\mu\mathbf{J},\quad \Delta\phi+k^2\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon},\qquad k^2=\omega^2\mu\varepsilon \tag{16}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A}-i\omega\mu\varepsilon\phi=0 \tag{17}$$

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A},\quad \mathbf{E}=-\nabla\phi+i\omega\mathbf{A}\,. \tag{18}$$

Poněvadž časově harmonické pole nemůže obsahovat časově nezávislou elektrostatickou složku, Lorentzova kalibrační podmínka (17) jednoznačně určuje skalární potenciál pomocí vektorového potenciálu. Časově harmonické elektromagnetické pole je tedy určeno pouze *třemi nezávislými skalárními funkcemi*.

Elektromagnetické pole v prostředí beze zdrojů

Teorie vlnovodů, jíž se převážně budeme v dalších částech zabývat, pojednává o *šíření* elektromagnetického záření v prostředích *beze zdrojů* s různými okrajovými podmínkami. V prostředí beze zdrojů je $\mathbf{J}=\mathbf{0}$, $\rho=0$ a Maxwellovy rovnice se redukují na homogenní soustavu

$$\begin{aligned} \nabla\times\mathbf{E} &= i\omega\mu\mathbf{H}, & \nabla\times\mathbf{H} &= -i\omega\varepsilon\mathbf{E} \\ \nabla\cdot\mathbf{H} &= 0 & \nabla\cdot\mathbf{E} &= 0 \end{aligned} \tag{19}$$

Helmholtzovy vlnové rovnice (16) přejdou v homogenní rovnice s nulovou pravou stranou. V homogenním prostředí beze zdrojů je možno bez újmy na obecnosti *volit* řešení rovnice pro skalární potenciál ve tvaru $\phi=0$; z Lorentzovy kalibrační podmínky (17) pak vyplývá pro vektorový potenciál podmínka $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$. Ta vzájemně svazuje složky vektorového potenciálu, takže *v prostředí beze zdrojů stačí k úplnému popisu elektromagnetického pole* s harmonickou časovou závislostí pouze *dvě nezávislé* (skalární) *funkce*.

Předpokládejme nyní, že materiálové parametry ε,μ nezávisejí na prostorových souřadnicích (uvažujeme *homogenní* prostředí). Poněvadž $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$, můžeme zavést novou vektorovou potenciální funkci, tzv. *magnetický Hertzův vektor* $\boldsymbol{\Pi}_h$ vztahem

$$\mathbf{A}=\mu\nabla\times\boldsymbol{\Pi}_h \tag{20}$$

Pro $\mathbf{A}$ platí homogenní Helmholtzova rovnice $\Delta\mathbf{A}+k^2\mathbf{A}=\mathbf{0}$. Dosazením (20) a úpravou

$$\Delta(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla\underbrace{\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})}_{0}-\nabla\times\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=-\nabla\times\left(\nabla\underbrace{\nabla\cdot\mathbf{A}}_{0}-\Delta\mathbf{A}\right)=\nabla\times\Delta\mathbf{A}$$

získáme rovnici $\nabla\times\left(\Delta\boldsymbol{\Pi}_h+k^2\boldsymbol{\Pi}_h\right)=\mathbf{0}$. Poněvadž v prostředí beze zdrojů je $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ *nezřídlové* (viz druhé dvě rovnice (19)), můžeme volit pro $\boldsymbol{\Pi}_h$ rovnici

$$\Delta\boldsymbol{\Pi}_h+k^2\boldsymbol{\Pi}_h=\mathbf{0}\,. \tag{21}$$

Pro vektory pole platí podle vztahů (18) a (20)

$$\mathbf{E} = i\omega\mu\nabla\times\boldsymbol{\Pi}_h \qquad \mathbf{H} = \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\Pi}_h \tag{22}$$

Název potenciálu $\boldsymbol{\Pi}_h$ vyplývá ze skutečnosti, že pro elektromagnetické pole v prostředí s nenulovou magnetizací — hustotou magnetických dipólových momentů $\mathbf{M}$ — v němž platí rovnice $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M})$, je možno odvodit rovnici pro Hertzův vektor ve tvaru

$$\Delta\boldsymbol{\Pi}_h + k^2\boldsymbol{\Pi}_h = -\mathbf{M}\,.$$

Poněvadž v elektromagnetickém poli v prostředí beze zdrojů platí mezi vektory pole duální vztah $\mathbf{E}\to\mathbf{H},\quad \mathbf{H}\to-\mathbf{E},\quad \varepsilon\to\mu,\quad \mu\to\varepsilon$, můžeme analogicky zavést rovněž *elektrický Hertzův vektor* $\boldsymbol{\Pi}_e$ vztahem

$$\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\nabla\times\boldsymbol{\Pi}_e\,; \tag{23}$$

z druhé Maxwellovy rovnice (19) vyplývá $\mathbf{E} = \left(1/-i\omega\varepsilon\right)\nabla\times\mathbf{H}$, a tedy

$$\mathbf{E} = \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\Pi}_e\,. \tag{24}$$

Poněvadž $\nabla\times\nabla\times\mathbf{H} = \nabla\underbrace{\nabla\cdot\mathbf{H}}_{0} - \Delta\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\nabla\times\mathbf{E} = \omega^2\varepsilon\mu\mathbf{H} = k^2\mathbf{H}$, splňuje $\mathbf{H}$ homogenní Helmholtzovu rovnici; pokud ε je nezávislé na souřadnicích, platí podle (23) také

$$\Delta\boldsymbol{\Pi}_e + k^2\boldsymbol{\Pi}_e = \mathbf{0}\,. \tag{25}$$

Analogicky jako pro magnetický Hertzův vektor lze i pro elektrický Hertzův vektor v prostředí s polarizací (hustotou elektrického dipólového momentu) **P** odvodit rovnici

$$\Delta\boldsymbol{\Pi}_e + k^2\boldsymbol{\Pi}_e = -\left(\mathbf{P}/\varepsilon_0\right).$$

Uveďme souhrnně **vztahy pro potenciály a vektory pole** s harmonickou časovou závislostí:

Skalární a vektorový potenciál

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A},\quad \mathbf{E} = i\omega\mathbf{A} - \nabla\phi \tag{26}$$

Rovnice pro skalární a vektorový potenciál

$$\Delta\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J},\quad \Delta\phi + k^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon},\qquad k^2 = \omega\mu\varepsilon \tag{27}$$

Lorentzova kalibrační podmínka

$$\nabla\cdot\mathbf{A} - i\omega\mu\varepsilon\phi = 0 \tag{28}$$

Prostředí beze zdrojů: $\phi = 0,\ \nabla\cdot\mathbf{A} = 0$.
Magnetický Hertzův vektor $\boldsymbol{\Pi}_h$:

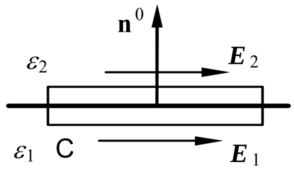
$$\mathbf{H} = \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\Pi}_h,\qquad \mathbf{E} = i\omega\mu\nabla\times\boldsymbol{\Pi}_h,\qquad \Delta\boldsymbol{\Pi}_h + k^2\boldsymbol{\Pi}_h = \mathbf{0} \tag{29}$$

Elektrický Hertzův vektor $\boldsymbol{\Pi}_e$:

$$\mathbf{E} = \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\Pi}_e, \qquad \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon \nabla \times \boldsymbol{\Pi}_e, \qquad \Delta \boldsymbol{\Pi}_e + k^2 \boldsymbol{\Pi}_e = \mathbf{0} \tag{30}$$

Okrajové podmínky na rozhraní prostředí

Zatím jsme se zabývali prostorově *homogenním* prostředím, v němž materiálové parametry ε a μ nezávisely na prostorových souřadnicích: $\nabla \varepsilon = \mathbf{0}, \nabla \mu = \mathbf{0}$. V mnohých případech se však prostředí skládá z několika homogenních oblastí s různými materiálovými parametry. V dalších částech se budeme zabývat pouze *nemagnetickými* materiály, v nichž $\mu = \mu_0$, přičemž různé materiály se liší permitivitou. Poněvadž vlastnosti takového prostředí se nemění spojitě, nelze pro rozhraní použít *diferenciální* Maxwellovy rovnice přímo.



Ukážeme nejprve, že na rozhraní prostředí s permitivitami ε_1 a ε_2 musí být spojité tečné složky intenzity elektrického pole. Veďme uzavřenou křivku C tak, jak je naznačeno na obrázku. Platí

$$\oint_{\mathsf{C}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \iint_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = i\omega \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

Budeme-li nyní zmenšovat plochu S uzavřenou křivkou C tak, že zkracujeme úseky ve směru normály $\mathbf{n}^0$, bude se integrál na pravé straně blížit nule, neboť $\boldsymbol{B}$ má konečnou velikost. Integrál na levé straně přejde v $\left(E_{t,1} - E_{t,2}\right) \cdot l \to 0$, kde l je délka úseku křivky C podél rozhraní a $E_{t,1}, E_{t,2}$ jsou složky intenzity elektrického pole ve směru $\boldsymbol{l}$. Poněvadž křivku C můžeme libovolně orientovat vůči rozhraní, můžeme podmínku pro $\mathbf{E}$ na rozhraní zapsat v obecném tvaru

$$\mathbf{n}^0 \times \left(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1\right) = \mathbf{0}. \tag{31}$$

Pro nevodivé prostředí beze zdrojů můžeme zcela analogicky odvodit podmínku pro tečné složky intenzity magnetického pole na rozhraní:

$$\mathbf{n}^0 \times \left(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1\right) = \mathbf{0}. \tag{32}$$

Intenzity elektrického i magnetického pole na rozhraní prostředí beze zdrojů jsou spojité.

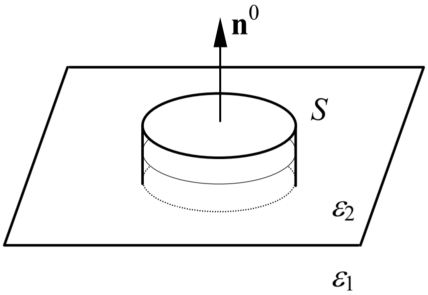
Pokud je jedno z prostředí *dokonale vodivé*, musíme postup modifikovat. V prostředí s vodivostí σ platí $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \neq \mathbf{0}$. Integrál přes uzavřenou křivku nyní dá

$$\oint_{\mathsf{C}} \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \iint_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{33}$$

Pokud $\sigma \to \infty$, je pole *uvnitř* dokonale vodivého prostředí nulové, jinak by totiž hustota proudu **J** rostla nade všechny meze. *Uvnitř* dokonale vodivého prostředí je tedy $\mathbf{E} = \mathbf{0}, \mathbf{H} = \mathbf{0}$. *Na rozhraní* dokonale vodivého a nevodivého prostředí může téci *v nekonečně tenké* vrstvě *konečný* proud; v tomto případě je výhodné zavést *plošnou hustotu proudu* $\mathbf{K}$(A/m) označující proud na jednotku „šířky“ rozhraní. Ze vztahu (33) pak vyplývá podmínka pro tečnou složku magnetického pole v *nevodivém* prostředí (ε_2) těsně „nad” rozhraním

$$\mathbf{n}^0 \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{K}. \tag{34}$$

Velikost plošné proudové hustoty je tedy rovna tečné složce intenzity magnetického pole vně vodivého prostředí.



Pro odvození podmínek spojitosti vektorů elektrické a magnetické indukce na rozhraní *dielektrických* prostředí vytvoříme na rozhraní uzavřenou plochu S ve tvaruválečku podle vedlejšího obrázku. Pak můžeme psát

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{D} \mathrm{d} V = \iiint_V \rho \mathrm{d} V = Q,$$

kde Q je celkový náboj uzavřený v ploše S. Budeme-li zmenšovat výšku válečku k nule, můžeme rovnici přepsat do tvaru

$$\mathbf{n}^0 \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \tau, \tag{35}$$

kde τ je *plošná hustota náboje* $\left(\mathrm{C/m^2}\right)$. Pro nevodivé prostředí bez nábojů platí tedy

$$\mathbf{n}^0 \cdot (\varepsilon_2 \mathbf{E}_2 - \varepsilon_1 \mathbf{E}_1) = 0 \tag{36}$$

Pokud je prostředí 1 dokonale vodivé, je $\mathbf{D}_1 = \mathbf{0}$ a podmínka (35) se zjednoduší na

$$\mathbf{n}^0 \cdot \mathbf{D}_2 = \tau. \tag{37}$$

Podobným způsobem odvodíme pro magnetické pole analogickou podmínku

$$\mathbf{n}^0 \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0; \tag{38}$$

Normálové složky elektrické i magnetické indukce na rozhraní nevodivých prostředí jsou tedy *spojité.*

V nemagnetickém prostředí $(\mu = \mu_0)$ můžeme podmínku (38) přepsat do tvaru

$$\mathbf{n}^0 \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0. \tag{39}$$

Pokud je prostředí 1 dokonale vodivé, je $\mathbf{H}_1 = \mathbf{0}$, a podmínka na rozhraní se zjednoduší:

$$\mathbf{n}^0 \cdot \mathbf{B}_2 = 0, \text{ resp. } \mathbf{n}^0 \cdot \mathbf{H}_2 = 0. \tag{40}$$

Podmínky spojitosti na rozhraní nevodivých i vodivých prostředí budeme v dalších částech často využívat.