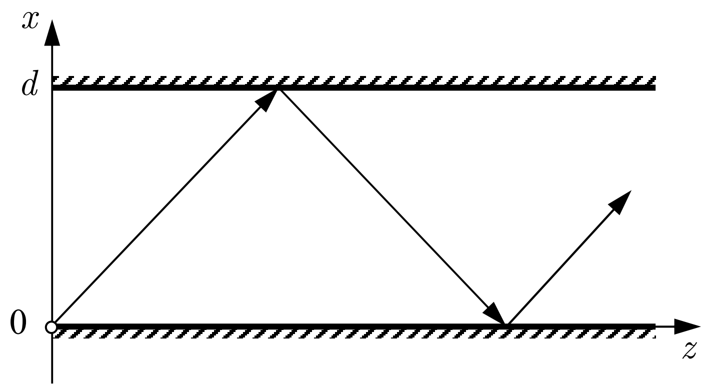
1. Kovové vlnovody

Pro vedení elektromagnetického záření ve frekvenční oblasti řádu jednotek a desítek GHz se využívají kovové vlnovody. Jsou v zásadě tvořeny dutým válcem s kovovými stěnami. Budeme nejprve předpokládat, že stěny vlnovodu jsou dokonale vodivé. Tato aproximace umožňuje rozvinout relativně jednoduchou a přitom velmi obecnou teorii kovových vlnovodů. Později ukážeme relativně jednoduchý způsob, jak vzít v úvahu vliv konečné vodivosti na ztráty vlnovodů a dutinových rezonátorů.

Dříve než se budeme systematicky věnovat teorii válcových vlnovodů, ukážeme si princip šíření elektromagnetických vln na nejjednodušším případě – vedení mezi dvěma dokonale vodivými deskami.

1.1. Vedení elektromagnetických vln dvěma paralelními kovovými deskami

Mějme dvě rovnoběžné dokonale vodivé desky; jejich vzdálenost označíme d, viz Obr. 1.



Obr. 1. Deskový vlnovod

Předpokládejme, že elektromagnetické záření se šíří ve směru podélné souřadnice x v rovině (x, z). Zřejmě ani vlnovodná struktura, ani rozložení pole nezávisí na souřadnici y kolmé k rovině nákresny. Proto můžeme v Maxwellových rovnicích popisujících šíření vlny položit všechny derivace podle y rovny nule, $\partial / \partial y \equiv 0$. Poněvadž desky jsou dokonale (elektricky) vodivé, musí být na jejich povrchu tečné složky intenzity elektrického pole rovny nule:

$$\begin{aligned} E_y(x=0,z) &= 0, \quad E_z(x=0,z) = 0, \\ E_y(x=d,z) &= 0, \quad E_z(x=d,z) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Maxwellovy rovnice pro homogenní prostředí beze zdrojů mají obecný tvar

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon \mathbf{E}. \tag{2}$$

Z těchto rovnic snadno odvodíme vlnovou rovnici

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}, \tag{3}$$

kde $k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$.

S uvážením vektorové identity $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla\nabla \cdot \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}$ získáme

$$\Delta \mathbf{E} - \nabla\nabla \cdot \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}, \tag{4}$$

a poněvadž v prostředí bez volných nábojů je

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \tag{5}$$

přejde rovnice (4) na Helmholtzovu rovnici

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}. \tag{6}$$

Struktura vlnovodu na Obr. 1 nezávisí na souřadnici y. V dalším se budeme zajímat pouze o šíření vln ve směru osy z, a můžeme tedy předpokládat, že rozložení pole nezávisí na souřadnici y:

$$\frac{\partial}{\partial y} \equiv 0. \tag{7}$$

Rovnice (6) se tak zjednoduší na dvojrozměrnou,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} + k^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}. \tag{8}$$

Z invariantnosti struktury vlnovodu vůči translaci ve směru z vyplývá separovatelnost proměnné z, a tedy i proměnné x. Budeme tedy hledat řešení rovnice (8) ve tvaru

$$\mathbf{E}(x, z) = f(z)\mathbf{e}(x). \tag{9}$$

Dosazením do (8) a vydělením funkcí $f(z)$ získáme rovnici

$$\frac{d^2 \mathbf{e}(x)}{dx^2} + \frac{1}{f(z)} \frac{\partial^2 f(z)}{dz^2} \mathbf{e}(x) + k^2 \mathbf{e}(x) = \mathbf{0}. \tag{10}$$

V této rovnice jsou první a třetí člen funkcemi pouze proměnné x, zatímco druhý člen obecně závisí na obou proměnných x a z. Proto musí být výraz formálně závislý na proměnné z roven konstantě; označíme ji $-\beta^2$. Pak platí

$$\frac{1}{f(z)} \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} = -\beta^2, \qquad \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} + \beta^2 f(z) = 0. \tag{11}$$

Tato rovnice má dvě nezávislá řešení

$$f(z) = \exp\left(\pm i\beta z\right); \tag{12}$$

pro další úvahy si pro jednoduchost vybereme řešení s kladným znaménkem, ale stejně dobře bychom mohli použít i druhé řešení, případně i jejich lineární kombinaci. O fyzikálním smyslu těchto řešení podiskutujeme později.

Z rovnice (10) pak pro vektorové pole $\mathbf{e}(x)$ získáme rovnici

$$\frac{d^2 \mathbf{e}(x)}{dx^2} + \left(k^2 - \beta^2\right)\mathbf{e}(x) = \mathbf{0}. \tag{13}$$

Obecné řešení této rovnice má zřejmě tvar

$$\mathbf{e}(x) = \mathbf{A}\cos\left(k_\perp x\right) + \mathbf{B}\sin\left(k_\perp x\right), \text{ kde } k_\perp = \sqrt{k^2 - \beta^2}. \tag{14}$$

Ke specifikaci řešení této rovnice potřebujeme znát okrajové podmínky. Podle Obr. 1 musí být *tečné složky* intenzity elektrického pole $\mathbf{e}(x)$ rovny nule pro $x = 0$ a $x = d$. Od tohoto okamžiku musíme rozlišovat dva případy. Vlivem podmínky (7) se totiž Maxwellovy rovnice pro složky vektorů $\mathbf{E}$ a $\mathbf{H}$ ($\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}$, $\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}$) rozpadají na dvě trojice vzájemně nezávislých rovnic:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial E_y}{\partial z} &= i\omega\mu H_x, & \frac{\partial H_y}{\partial z} &= i\omega\varepsilon E_x, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= i\omega\mu H_z, & \frac{\partial H_y}{\partial x} &= -i\omega\varepsilon E_z, \\ -i\omega\varepsilon E_y &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}, & i\omega\mu H_y &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}. \end{aligned} \tag{15}$$

S uvážením (9) a (12) dostaneme

$$\begin{aligned} -i\beta e_y(x) &= i\omega\mu h_x(x), & i\beta h_y(x) &= i\omega\varepsilon e_x(x), \\ \frac{de_y}{dx} &= i\omega\mu h_z, & \frac{dh_y}{dx} &= -i\omega\varepsilon e_z, \\ -i\omega\varepsilon e_y &= i\beta h_x - \frac{dh_z}{dx}, & i\omega\mu h_y &= i\beta e_x - \frac{de_z}{dx}. \end{aligned} \tag{16}$$

První trojice má jedinou složku vektoru intenzity elektrického pole $e_y(x)$ a dvě složky vektoru intenzity magnetického pole, h_x a h_z. Poněvadž se vlna šíří ve směru *z*, nazveme vlnu tohoto typu vlnou *transverzálně elektrickou*, TE. Druhá trojice má jedinou složku vektoru intenzity magnetického pole $h_y(x)$ a dvě složky vektoru intenzity elektrického pole, e_x a e_z. Vlnu tohoto typu nazveme tedy vlnou *transverzálně magnetickou*, TM.

Věnujme se na chvíli vlnám TE. Jelikož e_y je složka tečná k vodivým deskám, musí pro toto pole platit okrajové podmínky

$$e_y(0) = 0,\ \mathrm{e}_y(d) = 0. \tag{17}$$

Řešení rovnice (13) tak musíme zvolit ve tvaru

$$e_y(x) = B\sin\left(k_\perp x\right),\ k_\perp = \frac{m\pi}{d},\ \ m = 1, 2, \ldots. \tag{18}$$

Jednotlivá řešení pro různá *m* nazýváme vlnovodnými *vidy (módy)*. Ze vztahu (14) vyplývá, že konstanta šíření *m*-tého vidu je

$$\beta_m = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2} \tag{19}$$

Jelikož *m* může nabývat libovolně velkých celočíselných hodnot, je zřejmé, že pouze konečný počet konstant šíření je reálných, všechny ostatní jsou imaginární. Takové vidy se nazývají *evanescentní*, ve směru „šíření“ exponenciálně klesají: $e^{i\beta z}$ přejde v $e^{-|\beta| z}$.
Pro polarizaci TM platí jiná okrajová podmínka, totiž

$$E_z(0) = E_z(d) = 0. \tag{20}$$

Pak zřejmě musí platit

$$e_z(x) = B\sin\left(k_\perp x\right),\ k_\perp = \frac{m\pi}{d},\ \ m = 1, 2, \ldots. \tag{21}$$

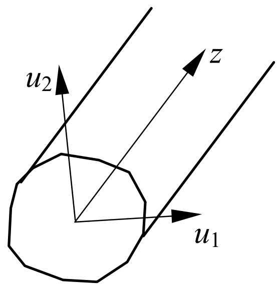
Z pravé části rovnic (16) pak dostaneme

$$\begin{aligned} h_y(x) &= -i\omega\varepsilon B \int \sin(k_\perp x)dx = -\frac{i\omega\varepsilon}{k_\perp} B\cos(k_\perp x), \\ e_x(x) &= \frac{\beta}{\omega\varepsilon} h_y(x) = \frac{i\beta}{k_\perp} B\cos(k_\perp x). \end{aligned} \tag{22}$$

V tomto případě *může řád vidu m nabýt i nulové hodnoty*, poněvadž to nezpůsobí vynulování celého pole: nenulové zůstane e_x i h_y, ale budou napříč vlnovodu *konstantní.* Pro $m = 0$ je ale také $k_\perp = m\pi/d = 0$, a tedy $\beta = k$. Poněvadž v tomto případě je nulová i podélná složka elektrického pole, nazýváme tento speciální vid TM_0 také videm TEM.
Jinak mají vidy TM polarizace podobné vlastnosti jako vidy TE: pouze konečný počet vidů TM se může *šířit* (tj. má reálnou konstantu šíření β), ostatní vidy jsou evanescentní.

1.2. Válcový vlnovod s dokonale vodivými stěnami

Válcový vlnovod s dokonale vodivými stěnami je schematicky znázorněn na Obr. 2.



Obr. 2: Válcový vlnovod s dokonale vodivými stěnami.

Základna válce může mít velmi obecný tvar. Zavedeme ortogonální soustavu souřadnic (u_1, u_2, z) tak, že v rovině kolmé na osu válce z tvoří (u_1, u_2) obecně křivočarou ortogonální souřadnicovou soustavu. Budeme se zabývat šířením elektromagnetického záření ve vlnovodu zaplněném homogenním dielektrikem s permitivitou ε a permeabilitou $\mu = \mu_0$. Poněvadž se zajímáme o šíření časově harmonické elektromagnetické vlny v prostředí beze zdrojů, stačí k jejímu úplnému popisu dvě skalární funkce. Ukázalo se, že bez újmy na obecnosti lze úplné vektorové pole šířící se vlnovodem vyjádřit jako superpozici vln popsaných elektrickým a magnetickým Hertzovým vektorem, přičemž každý z nich má pouze jedinou složku ve směru osy vlnovodu:

$$\boldsymbol{\Pi}_e = \Pi_e \mathbf{z}^0, \quad \boldsymbol{\Pi}_h = \Pi_h \mathbf{z}^0. \tag{23}$$

Ukážeme navíc, že pole popsané pomocí každého z těchto vektorů samostatně může splnit okrajové podmínky, a může se tedy ve vlnovodu šířit. Popíšeme nejprve vlny odvozené z magnetického Hertzova vektoru $\boldsymbol{\Pi}_h$.

Vlny odvozené z magnetického Hertzova vektoru — TE vlny

Pro složky pole odvozené z magnetického Hertzova vektoru platí výrazy

$$\mathbf{H} = \nabla\times\nabla\times\Pi_h\mathbf{z}^0, \quad \mathbf{E} = i\omega\mu\nabla\times\Pi_h\mathbf{z}^0, \quad \Delta\Pi_h + k^2\Pi_h = 0 \tag{24}$$

Poněvadž vlnovodná struktura je invariantní vůči posunutí podél souadnicové osy z, můžeme skalární Helmholtzovu rovnici řešit separací podélné souřadnice z. Vyjádříme Hertzův vektor jako součin funkce příčných souřadnic a podélné souřadnice

$$\Pi_h = \psi_h(u_1, u_2) f(z)\,, \tag{25}$$

dosadíme tento výraz do Helmholtzovy rovnice a vydělíme rovnici součinem $\psi_h f$. Dostaneme

$$\frac{1}{\psi_h}\Delta_\perp \psi_h(u_1, u_2) + \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} + k^2 = 0 \tag{26}$$

kde $\Delta_\perp = \partial^2 \big/ \partial u_1^2 + \partial^2 \big/ \partial u_2^2$. Poněvadž první člen v rovnici je funkcí pouze příčných souřadnic u_1, u_2 a druhý člen závisí pouze na podélné souřadnici z, může být rovnice (26) splněna pro všechna u_1, u_2, z *pouze tehdy, jsou-li tyto členy konstantní*. Označíme-li druhý člen konstantou $-\beta^2$ a součet druhého a třetího členu symbolem $k_\perp^2$, získáme rovnice

$$\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} = -\beta^2 f(z), \quad \Delta_\perp \psi_h + k_\perp^2 \psi_h = 0, \quad \beta^2 = k^2 - k_\perp^2. \tag{27}$$

Prvá z nich má zřejmě partikulární řešení

$$f(z) = e^{\pm i\beta z}, \tag{28}$$

takže Hertzův vektor můžeme vyjádřit jako funkci

$$\Pi_h(u_1, u_2, z) = e^{\pm \gamma z} \psi_h(u_1, u_2)\,. \tag{29}$$

Druhá z rovnic (27) je dvojrozměrnou Helmholtzovou rovnicí pro příčné souřadnice (u_1, u_2) .Podle vztahu (24) platí pro intenzitu magnetického pole výraz

$$\mathbf{H} = \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\Pi}_h = \nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}_h - \Delta\boldsymbol{\Pi}_h = \nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}_h + k^2\boldsymbol{\Pi}_h \tag{30}$$

Poněvadž $\boldsymbol{\Pi}_h = \Pi_{hz}\mathbf{z}^0$ má jen jednu složku, a to ve směru osy z, je $\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}_h = \pm i\beta\psi_h e^{\pm i\beta z}$. Pak platí

$$\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}_h = \pm i\beta\frac{\partial}{\partial z}\left(\psi_h e^{\pm i\beta z}\right) = \pm i\beta\nabla_\perp\psi_h e^{\pm i\beta z} - \beta^2\psi_h e^{\pm i\beta z}\mathbf{z}^0$$, a (30) můžeme vyjádřit jako

$$\mathbf{H} = \pm\gamma i\beta\nabla_\perp\psi_h e^{\pm i\beta z} + k_\perp^2\psi_h e^{\pm i\beta z}\mathbf{z}^0\,.$$

Pro intenzitu elektrického pole $\mathbf{E}$ platí podle (24)

$$\mathbf{E} = i\omega\mu\nabla\times\boldsymbol{\Pi}_h = i\omega\mu\nabla\times\left(\psi_h e^{\pm i\beta z}\mathbf{z}^0\right) = i\omega\mu\nabla\left(\psi_h e^{\pm i\beta z}\right)\times\mathbf{z}^0 = i\omega\mu\nabla_\perp\left(\psi_h e^{\pm i\beta z}\right)\times\mathbf{z}^0$$

Vektory elektromagnetického pole odvozené z Hertzova magnetického vektoru mají tedy tvar

$$\mathbf{H} = \left(\pm i\beta\nabla_\perp\psi_h + k_\perp^2\psi_h\mathbf{z}^0\right)e^{\pm i\beta z}, \quad \mathbf{E} = i\omega\mu\nabla_\perp\psi_h\times\mathbf{z}^0 e^{\pm i\beta z} \tag{31}$$

Poněvadž $\nabla_\perp \psi_h = \dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial \psi_h}{\partial u_1}\mathbf{u}_1^0 + \dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial \psi_h}{\partial u_2}\mathbf{u}_2^0$ a $\mathbf{u}_1^0 \times \mathbf{z}^0 = -\mathbf{u}_2^0, \mathbf{u}_2^0 \times \mathbf{z}^0 = \mathbf{u}_1^0$, můžeme psát

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= i\omega\mu\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial \psi_h}{\partial u_2}\mathbf{u}_1^0 - \frac{1}{h_1}\frac{\partial \psi_h}{\partial u_1}\mathbf{u}_2^0\right)e^{\pm i\beta z}, \\ \mathbf{H} &= \left[\pm i\beta\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial \psi_h}{\partial u_1}\mathbf{u}_1^0 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial \psi_h}{\partial u_2}\mathbf{u}_2^0\right) + k_\perp^2 \psi_h \mathbf{z}^0\right].e^{\pm i\beta z} \end{aligned} \tag{32}$$

Poněvadž vektor intenzity elektrického pole má podle tohoto výrazu *pouze příčné složky pole*, používá se pro vlnu tohoto typu označení *transverzálně elektrická (TE) vlna*, případně *vlna TE polarizace*. Někdy se též stručněji označuje jako *vlna H*.

Mezi příčnými složkami polí $\mathbf{E}_\perp = \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{z}^0 \times \nabla_\perp \psi_h e^{\pm i\beta z}$, $\mathbf{H}_\perp = \pm i\beta \nabla_\perp \psi_h e^{\pm i\beta z}$ platí zřejmě vztah

$$\mathbf{E}_\perp = \mathbf{E} = \pm Z_h \mathbf{z}^0 \times \mathbf{H}_\perp , \tag{33}$$

kde

$$Z_h = -\frac{\omega\mu}{\beta} = -\frac{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{\beta}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = -\frac{k_0}{\beta}Z_0 \tag{34}$$

je *vlnová impedance TE vln ve vlnovodu*; přitom $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ je vlnová impedance volného prostoru a $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \omega/c$ je vlnové číslo (veliost vektoru šíření) ve volném prostoru.

Vlny odvozené z elektrického Hertzova vektoru — TM vlny

Z elektrického Hertzova vektoru jsme pro vektory elektromagnetického pole odvodili výrazy

$$\mathbf{E} = \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\Pi}_e, \qquad \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\nabla \times \boldsymbol{\Pi}_e .$$

Poněvadž elektrický Hertzův vektor splňuje touž Helmholtzovu rovnici jako $\boldsymbol{\Pi}_h$, můžeme psát

$$\boldsymbol{\Pi}_e = \psi_e\left(u_1, u_2\right)e^{\pm i\beta z}\mathbf{z}^0,\ \Delta_\perp \psi_e + k_\perp^2 \psi_e = 0,\ k_\perp^2 + \beta^2 = k^2 . \tag{35}$$

Rovněž nyní platí $\nabla\nabla \cdot \boldsymbol{\Pi}_e = \pm i\beta \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\psi_e e^{\pm i\beta z}\right) = \pm i\beta\nabla_\perp \psi_e e^{\pm i\beta z} - \beta^2 \psi_e e^{\pm i\beta z}\mathbf{z}^0$, a pro vektory pole pak získáme analogicky k (31)

$$\mathbf{E} = \left(\pm i\beta\nabla_\perp \psi_e + k_\perp^2 \psi_e \mathbf{z}^0\right)e^{\pm i\beta z}, \qquad \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\nabla_\perp \psi_e \times \mathbf{z}^0 e^{\pm i\beta z}, \tag{36}$$

neboli, explicitně vyjádřeno,

$$\mathbf{E} = \left[\pm i\beta \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi_e}{\partial u_1} \mathbf{u}_1^0 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \psi_e}{\partial u_2} e^{\pm i\beta z} \mathbf{u}_2^0 \right) + k_\perp^2 \psi_e \mathbf{z}^0 \right] e^{\pm i\beta z},$$
$$\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial \psi_e}{\partial u_2} \mathbf{u}_1^0 - \frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi_e}{\partial u_1} \mathbf{u}_2^0 \right) e^{\pm i\beta z}. \tag{37}$$

Jak je vidět z tohoto výrazu, vektor intenzity magnetického pole má nyní pouze příčné složky; taková vlna se proto nazývá *transverzálně magnetická (TM),* někdy též *E* vlna.

Z výrazu (36) lze snadno odvodit mezi příčnými složkami vektorů pole vztah

$$\mathbf{H}_\perp = \mathbf{H} = \pm Y_e \mathbf{z}^0 \times \mathbf{E}_\perp, \tag{38}$$

kde

$$Y_e = \frac{\omega\varepsilon}{\beta} = \frac{k_0 \varepsilon_r}{\beta} Y_0. \tag{39}$$

je vlnová admitance TM (H) vln, a $Y_0 = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}$ je vlnová admitance volného prostoru.

1.3. Řešení vlnové rovnice pro ψ_h a ψ_e. Vlnovodné módy

TE vlny

Nejprve se věnujeme TE (H) vlnám. Funkce ψ_h splňuje příčnou Helmholtzovu rovnici (27) a vektory pole jsou dány výrazem (31). Na dokonale vodivých stěnách vlnovodu musí být tečné složky intenzity elektrického pole nulové, tj. musí být splněna okrajová podmínka $\mathbf{n}^0 \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$, kde $\mathbf{n}^0$ je jednotkový vektor ve směru normály k plášti vlnovodu. Poněvadž $\mathbf{n}^0 \times \mathbf{E} = -i\omega\mu \mathbf{n}^0 \times (\mathbf{z}^0 \times \nabla_\perp \psi_h e^{\pm i\beta z}) = -i\omega\mu \mathbf{z}^0 \left(\mathbf{n}^0 \cdot \nabla \psi_h \right) e^{\pm i\beta z}$ vzhledem k tomu, že $\mathbf{n}^0 \cdot \mathbf{z}^0 = 0$, a tento vztah musí platit pro všechna *z,* vyplývá z okrajové podmínky vztah $\mathbf{n}^0 \cdot \nabla_\perp \psi_h = 0$. Součin gradientu funkce ψ_h a jednotkového vektoru ve směru normály udává *derivaci funkce ψ_h ve směru normály*; okrajovou podmínku tak můžeme zapsat v kompaktním tvaru

$$\left. \frac{\partial \psi_h}{\partial n} \right|_C = 0 \tag{40}$$

kde C je obvodová křivka průřezu vlnovodu. Vlny TE polarizace jsou tak určeny řešením rovnice

$$\Delta_\perp \psi_h + k_\perp^2 \psi_h = 0 \tag{41}$$

s okrajovou podmínkou (40). To je klasický *dvojrozměrný Neumannův problém* pro určení vlastních čísel $k_\perp^2$ a vlastních funkcí ψ_h lineárního diferenciálního operátoru $-\Delta_\perp$.

TM vlny

Elektromagnetické pole polarizace TM (E) je podle (36) určeno funkcí ψ_e, která splňuje homogenní Helmholtzovu rovnici (35), tj.

$$\Delta_\perp \psi_e + k_\perp^2 \psi_e = 0\,. \tag{42}$$

Poněvadž $E_z = k_\perp^2 \psi_e e^{\pm i\beta z}$ představuje na plášti vlnovodu tečnou složku, musí být zřejmě splněna okrajová podmínka

$$\psi_e\big|_C = 0\,. \tag{43}$$

Pro zbývající tečnou složku intenzity elektrického pole $\pm\gamma \mathbf{n}^0 \times \nabla_\perp \psi_e e^{\pm i\beta z}$ zřejmě platí

$$\mathbf{n}^0 \times \nabla_\perp \psi_e = \mathbf{n}^0 \times \left[\left(\partial\psi_e/\partial\tau\right)\boldsymbol{\tau}^0 + \left(\partial\psi_e/\partial n\right)\mathbf{n}^0\right] = \mathbf{z}^0\, \partial\psi_e/\partial\tau\,,$$

kde $\boldsymbol{\tau}^0$ je jednotkový vektor ve směru tečny k obvodové křivce pláště C . Poněvadž podle (43) je ψ_e na plášti identicky nulové, musí být i $\left(\partial\psi_e / \partial\tau\right)\big|_C = 0$, a tedy i druhá tečná složka intenzity elektrického pole je na plášti vlnovodu nulová.

Vlny TM polarizace jsou tedy určeny řešením Helmholtzovy rovnice (42) s okrajovou podmínkou (43). To je klasická *Dirichletova úloha* pro určení vlastních hodnot $k_\perp^2$ a vlastních funkcí ψ_e lineárního diferenciálního operátoru $-\Delta_\perp$.

TE a TM módy kovového vlnovodu

Helmholtzovu rovnici (41) resp. (42) můžeme přepsat do tvaru rovnice pro vlastní funkce a vlastní hodnoty lineárního diferenciálního operátoru druhého řádu $-\Delta_\perp$:

$$-\Delta_\perp \psi_\alpha = k_{\perp\alpha}^2 \psi_\alpha, \qquad \alpha = h, e \tag{44}$$

s Neumannovou (pro $\alpha = h$, tj. TE polarizaci) nebo Dirichletovou ($\alpha = e$, tedy TM polarizaci) okrajovou podmínkou. Z teorie samoadjungovaných lineárních operátorů je známo, že rovnice (44) s okrajovými podmínkami (40) resp. (43) má nekonečně mnoho diskrétních vlastních hodnot $k_{\perp j}^2$, které jsou kladné a tvoří rostoucí posloupnost

$$0 \le k_{\perp\alpha,1}^2 \le k_{\perp\alpha,2}^2 \le \ldots \le k_{\perp\alpha,j}^2 \le \ldots, \qquad \alpha = h,e \text{, resp. TE, TM.} \tag{45}$$

Každému vlastnímu číslu $k_{\perp\alpha,j}^2$ přísluší (reálná) vlastní funkce $\psi_{\alpha,j}(u_1,u_2)$, která splňuje okrajovou podmínku (40) resp. (43).

Každému řešení Helmholtzovy rovnice (41) resp. (44) odpovídá tedy elektromagnetická vlna polarizace TE resp. TM, jejíž příčné rozložení pole je (až na multiplikativní konstantu) určeno vztahy (31) resp. (36) a podélná závislost je určena faktorem $e^{\pm i\beta z}$. Konstanta β je podle poslední z rovnic (27) určena příčnou konstantou šíření $k_{\perp\alpha,j}$ a vlnovým číslem *k*:

$$\beta_j^\alpha = \sqrt{k^2 - k_{\perp\alpha,j}^2}\,. \tag{46}$$

Je zřejmé, že pokud je splněna podmínka

$$k_{\perp\alpha,j}^2 < k^2\,, \tag{47}$$

je konstanta β_j^α reálná a *vlna se šíří podél osy vlnovodu bez útlumu* s faktorem $\exp(i\beta_j^\alpha z)$, kde β_j^α je *konstanta šíření* módu. Takové vlně se říká *vedený mód (vid) vlnovodu*; chceme-li zdůraznit skutečnost, že se šíří (teoreticky) bez útlumu, nazýváme ji *šířivý mód (vid)*. Ze vztahu (45) vyplývá, že šířivých módů ve vlnovodu může existovat pouze *konečný počet*; pro dostatečně velké *j* je podmínka (47) vždy překročena a všechny vyšší módy jsou ve směru šíření vlny *tlumeny* faktorem $\exp(-\left|\beta_j^\alpha\right| z)$. Takové módy se nazývají *tlumené (evanescentní, nešířivé)* módy. Na rozdíl od šířivých módů může ve vlnovodu existovat *nekonečně (ale spočetně) mnoho evanescentních módů*.

Je zajímavé si uvědomit, že příčná konstanta $k_{\perp\alpha,j}$ je jako vlastní hodnota Helmholtzovy rovnice (44) určena *pouze geometrií vlnovodu*, tj. tvarem a rozměry jeho průřezu, *nikoli frekvencí (vlnovou délkou)* elektromagnetického záření, které se ve vlnovodu šíří. Naproti tomu vlnové číslo *k* na vlnové délce (resp. frekvenci) závisí. Pokud frekvence elektromagnetické vlny vzrůstá, roste vlnové číslo $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ a podle (47) vzrůstá i počet šířivých módů ve vlnovodu. Je výhodné zavést místo příčné konstanty šíření $k_{\perp\alpha,j}$ veličinu $\lambda_{c,j}^\alpha$ vztahem

$$k_{\perp\alpha,j} = 2\pi / \lambda_{c,j}^\alpha . \tag{48}$$

Poněvadž $k = 2\pi / \lambda$, má zřejmě veličina $\lambda_{c,j}^\alpha$ fyzikální význam *mezní (kritické) vlnové délky* módu (α, j). Jinými slovy, *pokud je vlnová délka λ elektromagnetického záření menší než $\lambda_{c,j}^\alpha$, mód (α, j) se ve vlnovodu šíří*, pokud je větší, je mód tlumený. V technické praxi se místo symbolů (α, j) používá označení TE_j, resp. TM_j a pro mezní (kritickou) vlnovou délku *j*-tého módu symbolů $\lambda_{c,j}^{TE}$ resp. $\lambda_{c,j}^{TM}$.

Šíření módu (α, j) podél vlnovodu je popsáno fázovým faktorem $\exp\left[i(\beta_j^\alpha z - \omega t)\right]$. Roviny konstantní fáze módu jsou určené vztahem $\beta_j^\alpha z - \omega t = const$ a šíří se *fázovou rychlostí módu*

$$v_j^\alpha = dz / dt = \omega / \beta_j^\alpha . \tag{49}$$

Vzdálenost dvou rovin lišících se ve stejný časový okamžik ve fázi o 2π určuje *vlnovou délku $\lambda_{g,j}^\alpha$ módu ve vlnovodu*; zřejmě platí $\beta_j^\alpha \cdot \lambda_{g,j}^\alpha = 2\pi$, neboli

$$\lambda_{g,j}^\alpha = 2\pi / \beta_j^\alpha . \tag{50}$$

Vztah (46) můžeme pak přepsat do tvaru

$$\lambda_{g,j}^\alpha = \sqrt{(2\pi/\lambda)^2 - 2\pi/\lambda_{c,j}^\alpha} ,$$

odkud snadnou úpravou získáme

$$\lambda_{g,j}^\alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\lambda/\lambda_{c,j}^\alpha\right)^2}} . \tag{51}$$

Vlnová délka vedeného módu kovového vlnovodu je větší než vlnová délka záření v neohraničeném prostředí. Pro $\lambda \to \lambda_{c,j}^{\alpha}$ roste vlnová délka módu ve vlnovodu nade všechny meze.

Výraz (49) pro fázovou rychlost šíření módu ve vlnovodu snadno upravíme do tvaru

$$v_j^{\alpha} = \frac{\omega}{c}\frac{c}{\beta_j^{\alpha}} = c\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda_{g,j}^{\alpha}}{2\pi} = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\lambda/\lambda_{c,j}^{\alpha}\right)^2}}. \tag{52}$$

Fázová rychlost šíření vedeného módu v kovovém vlnovodu je tedy vždy *větší než rychlost světla v neohraničeneém prostředí.* Pro $\lambda \to \lambda_{c,j}^{\alpha}$ roste fázová rychlost módu nade všechny meze.

Jak ukážeme později v kapitole o disperzi vláknových vlnovodů, energie se ve vlnovodu šíří *grupovou rychlostí* $v_{g,j}^{\alpha} = d\omega \big/ d\beta_j^{\alpha} = \left(d\beta_j^{\alpha} \big/ d\omega\right)^{-1}$. Poněvadž $\omega = 2\pi c/\lambda$, derivaci podle ω můžeme nahradit derivací podle λ podle vztahu $d\omega = -\left(2\pi c/\lambda^2\right) d\lambda$. Získáme

$$\frac{d\beta_j^{\alpha}}{d\omega} = -\frac{\lambda^2}{2\pi c}\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-\left(\lambda/\lambda_{c,j}^{\alpha}\right)^2}\right],$$

což po úpravách vede na výraz

$$v_{g,j}^{\alpha} = c\sqrt{1-\left(\lambda \big/ \lambda_{c,j}^{\alpha}\right)^2} \tag{53}$$

pro grupovou rychlost šíření módu. Odtud je zřejmé, že *rychlost šíření energie ve vlnovodu je vždy menší než rychlost šíření světla v neohraničeném prostředí*. Porovnáním vztahů (52) a (53) zjistíme, že mezi fázovou a grupovou rychlostí šíření vlnovodného módu platí vztah

$$v_j^{\alpha} \cdot v_{g,j}^{\alpha} = c^2. \tag{54}$$

Pro $\lambda \to \lambda_{c,j}^{\alpha}$ tedy klesá grupová rychlost šíření módu k nule.

Podívejme se nyní podrobněji na rozložení elektromagnetického pole vlnovodných módů. Podle (31) a (36) je rozložení pole *j*-tého šířivého TE módu dáno výrazy

$$\mathbf{H}_j^{TE} = \left(\pm i\beta_j^{TE}\nabla_{\perp}\psi_{h,j} + (k_{\perp j}^{TE})^2\,\psi_{h,j}\mathbf{z}^0\right)e^{\pm i\beta_j^{TE} z}, \quad \mathbf{E}_j^{TE} = i\omega\mu\nabla_{\perp}\psi_{h,j}\times\mathbf{z}^0 e^{\pm i\beta_j^{TE} z} \tag{55}$$

a pole *j*-tého šířivého TM módu výrazy

$$\mathbf{E}_j^{TM} = \left(\pm i\beta_j^{TM}\nabla_{\perp}\psi_{e,j} + (k_{\perp,j}^{TM})^2\psi_{e,j}\mathbf{z}^0\right)e^{\pm i\beta_j^{TM} z}, \quad \mathbf{H}_j^{TM} = -i\omega\varepsilon\nabla_{\perp}\psi_{e,j}\times\mathbf{z}^0 e^{\pm i\beta_j^{TM} z}. \tag{56}$$

V obou případech může být funkce ψ zvolena jako *reálné* řešení Helmholtzovy rovnice (44). Z výrazů (55) a (56) je pak zřejmé, že *příčné složky* elektrického a magnetického pole *téhož šířivého módu* jsou *soufázové* (ryze imaginární), zatímco *podélná složka je fázově posunuta o* $\pm\pi/2$ vůči příčným složkám (je reálná). Pro nešířivý mód toto tvrzení neplatí, *příčné* složky jeho elektrického a magnetického pole jsou totiž posunuty o $\pm\pi/2$.

Ze vztahu (31) vyplývá, že elektromagnetické pole módu TE$_m$ šířícího se v kladném resp. záporném směru osy z je možno vyjádřit v obecném tvaru

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_m^{TE+} &= \mathbf{e}_m^{TE}\left(u_1,u_2\right)e^{i\beta_m^{TE}z} = \mathbf{e}_{\perp m}^{TE}\left(u_1,u_2\right)e^{i\beta_m^{TE}z}, \\
\mathbf{H}_m^{TE+} &= \mathbf{h}_m^{TE}\left(u_1,u_2\right)e^{i\beta_m^{TE}z} = \mathbf{h}_{\perp m}^{TE}\left(u_1,u_2\right)e^{i\beta_m^{TE}z} + \mathbf{z}^0 h_{zm}^{TE}\left(u_1,u_2\right)e^{i\beta_m^{TE}z}, \\
\mathbf{E}_m^{TE-} &= \mathbf{e}_m^{TE}\left(u_1,u_2\right)e^{-i\beta_m^{TE}z} = \mathbf{e}_{\perp m}^{TE}\left(u_1,u_2\right)e^{-i\beta_m^{TE}z}, \\
\mathbf{H}_m^{TE-} &= \mathbf{h}_m^{TE}\left(u_1,u_2\right)e^{-i\beta_m^{TE}z} = -\mathbf{h}_{\perp m}^{TE}\left(u_1,u_2\right)e^{-i\beta_m^{TE}z} + \mathbf{z}^0 h_{zm}^{TE}\left(u_1,u_2\right)e^{-i\beta_m^{TE}z},
\end{aligned}
\tag{57}
$$

kde $\mathbf{e}_m^{TE}\left(u_1,u_2\right)$, $\mathbf{h}_m^{TE}\left(u_1,u_2\right)$ jsou příčná rozložení elektrického resp. magnetického pole daného módu TE. Podobně ze vztahu (36) vyplývá, že elektromagnetické pole módu TM$_m$ šířícího se v kladném resp. záporném směru osy z je možno vyjádřit v obecném tvaru

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_m^{TM+} &= \mathbf{e}_m^{TM}\left(u_1,u_2\right)e^{i\beta_m^{TM}z} = \mathbf{e}_{\perp m}^{TM}\left(u_1,u_2\right)e^{i\beta_m^{TM}z} + \mathbf{z}^0 e_{zm}^{TM}\left(u_1,u_2\right)e^{i\beta_m^{TM}z}, \\
\mathbf{H}_m^{TM+} &= \mathbf{h}_m^{TM}\left(u_1,u_2\right)e^{i\beta_m^{TM}z} = \mathbf{h}_{\perp m}^{TM}\left(u_1,u_2\right)e^{i\beta_m^{TM}z}, \\
\mathbf{E}_m^{TM-} &= \mathbf{e}_m^{TM}\left(u_1,u_2\right)e^{-i\beta_m^{TM}z} = \mathbf{e}_{\perp m}^{TM}\left(u_1,u_2\right)e^{-i\beta_m^{TM}z} - \mathbf{z}^0 e_{zm}^{TM}\left(u_1,u_2\right)e^{-i\beta_m^{TM}z}, \\
\mathbf{H}_m^{TM-} &= \mathbf{h}_m^{TM}\left(u_1,u_2\right)e^{-i\beta_m^{TM}z} = -\mathbf{h}_{\perp m}^{TM}\left(u_1,u_2\right)e^{-i\beta_m^{TM}z},
\end{aligned}
\tag{58}
$$

kde $\mathbf{e}_m^{TM}\left(u_1,u_2\right)$, $\mathbf{h}_m^{TM}\left(u_1,u_2\right)$ jsou příčná rozložení elektrického resp. magnetického pole daného módu TM.

Zjistili jsme tedy, že v kovovém vlnovodu se elektromagnetické záření šíří ve formě vlnovodných módů (vidů). Každý mód je charakterizován svým (příčným) rozložením pole a svou (fázovou) rychlostí šíření. Při určité vlnové délce záření se ve vlnovodu může šířit pouze konečný počet „šířivých" módů, ostatní módy jsou „nešířivé" (jsou velmi rychle exponenciálně tlumeny ve směru šíření). Počet módů ve vlnovodu je nekonečně velký, ale spočetný. Spektrum (příčných) konstant šíření módů je diskrétní. Každý mód je možno přiřadit k jednomu ze dvou typů, k módům polarizace TE nebo TM. Vektor intenzity elektrického pole TE módů je vždy kolmý k ose vlnovodu (nemá podélnou složku). Totéž platí pro vektor intenzity magnetického pole TM módů. Fázová rychlost šíření i vlnová délka módu v kovovém vlnovodu jsou větší než rychlost šíření světla a vlnová délka záření ve volném prostoru.

1.4. Ortogonální vlastnosti vlnovodných módů

V této části ukážeme některé velmi užitečné obecné vlastnosti módů kovových vlnovodů.

Z matematiky je známo, že vlastní funkce operátoru $-\Delta_\perp$ příslušné různým vlastním hodnotám $k_{\perp,j}$ jsou vzájemně ortogonální. Platí tedy

$$
\iint\limits_S \psi_{h,j}\psi_{h,l}dS = 0, \quad \iint\limits_S \psi_{e,j}\psi_{e,l}dS = 0, \quad \iint\limits_S \psi_{h,j}\psi_{e,l}dS = 0, \quad j \neq l, \tag{59}
$$

pokud $k_{\perp,j} \neq k_{\perp,l}$. V případě rovnosti vlastních hodnot $k_{\perp,j} = k_{\perp,l}$ můžeme příslušné vlastní funkce ortogonalizovat.

Nejprve ukážeme, že platí

$$\iint_S \mathbf{E}_j^{TM} \cdot \mathbf{E}_l^{TM} dS = 0\,, \tag{60}$$

kde *S* označuje průřez vlnovodu.

Podle (56) k tomu stačí vypočítat $\iint_S \nabla_\perp \psi_{e,j} \cdot \nabla_\perp \psi_{e,l} dS$; příspěvek podélných složek polí je totiž nulový v důsledku platnosti vztahu (59). Dvojrozměrnou variantu Gaussovy věty můžeme zapsat ve tvaru

$$\iint_S \nabla_\perp \cdot \left(\psi_{e,j} \nabla \psi_{e,l}\right) dS = \oint_C \mathbf{n}^0 \cdot \psi_{e,j} \nabla \psi_{e,l} dl = \oint_C \psi_{e,j} \frac{\partial \psi_{e,l}}{\partial n} dl = 0\,, \tag{61}$$

neboť na křivce C je $\psi_{e,j}$ nulové. Úpravou levé strany dostaneme

$$\begin{aligned} \iint_S \nabla_\perp \cdot \left(\psi_{e,j} \nabla_\perp \psi_{e,l}\right) dS &= \iint_S \nabla_\perp \psi_{e,j} \cdot \nabla_\perp \psi_{e,l} dS + \iint_S \psi_{e,j} \Delta_\perp \psi_{e,l}\, dS = \\ &= \iint_S \nabla_\perp \psi_{e,j} \cdot \nabla_\perp \psi_{e,l} dS - \left(k_{\perp,l}^{TM}\right)^2 \underbrace{\iint_S \psi_{e,j} \psi_{e,l} dS}_{0} = 0, \end{aligned} \tag{62}$$

čímž je důkaz hotov. Analogický vztah pro TE módy

$$\iint_S \mathbf{E}_j^{TE} \cdot \mathbf{E}_l^{TE} dS = 0 \tag{63}$$

podle (55) platí, pokud

$$\iint_S \left(\mathbf{z}^0 \times \nabla_\perp \psi_{h,j}\right) \cdot \left(\mathbf{z}^0 \times \nabla_\perp \psi_{h,l}\right) dS = 0\,.$$

Součin pod integrálem je možno upravit takto:

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{z}^0 \times \nabla_\perp \psi_{h,j}\right) \cdot \left(\mathbf{z}^0 \times \nabla_\perp \psi_{h,l}\right) = \mathbf{z}^0 \cdot \left[\nabla_\perp \psi_{h,j} \times \left(\mathbf{z}^0 \times \nabla_\perp \psi_{h,l}\right)\right] = \\ &= \mathbf{z}^0 \cdot \left[\mathbf{z}^0 \nabla_\perp \psi_{h,j} \cdot \nabla_\perp \psi_{h,l} - \nabla_\perp \psi_{h,l} \underbrace{\left(\mathbf{z}^0 \cdot \nabla_\perp \psi_{h,j}\right)}_{0}\right] = \nabla_\perp \psi_{h,j} \cdot \nabla_\perp \psi_{h,l}. \end{aligned}$$

Tím jsme úlohu převedli na předchozí případ. Vztah analogický s (62) platí zřejmě i pro ψ_h vzhledem k okrajové podmínce $(\partial \psi_{h,l} / \partial n)\big|_C = 0$. Vztah (63) tedy platí.

Podobně ukážeme, že platí rovněž

$$\iint_S \mathbf{E}_j^{TE} \cdot \mathbf{E}_l^{TM} dS = 0\,. \tag{64}$$

K tomu je třeba ukázat, že platí

$$I = \iint_S \left(\mathbf{z}^0 \times \nabla_\perp \psi_{h,j}\right) \cdot \nabla_\perp \psi_{e,l} dS = 0\,; \tag{65}$$

podélná složka vektoru $\mathbf{E}_l^{TM}$ se přitom neuplatní, poněvadž je kolmá k $\mathbf{E}_j^{TE}$.

Upravíme výraz pod integrálem:

$$\nabla_\perp \cdot \left(\mathbf{z}^0\psi_{h,j} \times \nabla_\perp\psi_{e,l}\right) = \left(\nabla_\perp \times \mathbf{z}^0\psi_{h,j}\right)\cdot \nabla_\perp\psi_{e,l} - \mathbf{z}^0\psi_{h,j} \cdot \underbrace{\nabla_\perp \times \nabla_\perp\psi_{e,l}}_{0}$$
$$= -\left(\mathbf{z}^0 \times \nabla_\perp\psi_{h,j}\right)\cdot \nabla_\perp\psi_{e,l}.$$

Platí tedy

$$I = -\iint_S \nabla_\perp \cdot \left(\mathbf{z}^0\psi_{h,j} \times \nabla_\perp\psi_{e,l}\right)dS = -\oint_C \mathbf{n}^0 \cdot \left(\mathbf{z}^0\psi_{h,j} \times \nabla_\perp\psi_{e,l}\right)dl\,.$$

Avšak $\nabla_\perp\psi_{e,l}$ popisuje podle (56) příčnou složku elektrického pole TM módu na plášti, které může mít nenulovou pouze normálovou složku. Pak $\mathbf{z}^0 \times \nabla_\perp\psi_{e,l}$ má směr tečny k plášti, takže $\mathbf{n}^0 \cdot \left(\mathbf{z}^0 \times \nabla_\perp\psi_{e,l}\right) = 0$. Integrál *I* je tedy nulový a vztah (64) platí.

Podobným způsobem je možno dokázat, že pro $j \neq l$ platí analogické vztahy i pro vektory intenzit magnetického pole:

$$\iint_S \mathbf{H}_j^{TE} \cdot \mathbf{H}_l^{TE} dS = 0,\ \iint_S \mathbf{H}_j^{TM} \cdot \mathbf{H}_l^{TM} dS = 0,\ \ \iint_S \mathbf{H}_j^{TE} \cdot \mathbf{H}_l^{TM} dS = 0. \tag{66}$$

Poznamenejme, že z (55) a (56) bezprostředně vyplývá, že

$$\mathbf{E}_j^{TE} \cdot \mathbf{H}_j^{TE} = 0, \qquad \mathbf{E}_j^{TM} \cdot \mathbf{H}_j^{TM} = 0\,. \tag{67}$$

Vektory intenzit elektrického a magnetického pole téhož módu TE i TM jsou tedy v každém bodě uvnitř vlnovodu k sobě navzájem kolmé.

Ortogonalita vektorových polí vlnovodných módů

Odvodíme nyní obecný vztah pro ortogonalitu polí vlnovodných módů v kovových vlnovodech s dokonale vodivým pláštěm. K tomu vyjdeme z Lorentzovy podmínky vzájemnosti (teorému reciprocity), který platí mezi libovolnými dvěma poli splňujícími Maxwellovy rovnice v téže oblasti (vyplněné lineárním reciprokým prostředím). Mějme dvě nezávislá řešení Maxwellových rovnic popsaná vektory $\mathbf{E}_m,\ \mathbf{H}_m$ a $\mathbf{E}_n,\ \mathbf{H}_n$. Indexy *m* a *n* mohou označovat např. různé vlnovodné vidy. Platí tedy

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}_m &= i\omega\mu\mathbf{H}_m, & \nabla \times \mathbf{E}_n &= i\omega\mu\mathbf{H}_n, \\ \nabla \times \mathbf{H}_m &= -i\omega\varepsilon\mathbf{E}_m, & \nabla \times \mathbf{H}_n &= -i\omega\varepsilon\mathbf{E}_n. \end{aligned} \tag{68}$$

Ukážeme, že platí vztah (Lorentzův teorém reciprocity)

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n - \mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_m\right) = 0\,. \tag{69}$$

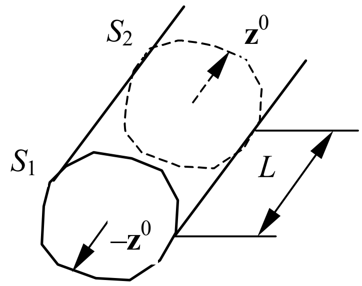
Úprava vztahu (69) podle vzorce pro divergenci vektorového součinu dá

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n - \mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_m) =$$
$$= (\nabla \times \mathbf{E}_m) \cdot \mathbf{H}_n - \mathbf{E}_m \cdot (\nabla \times \mathbf{H}_n) - (\nabla \times \mathbf{E}_n) \cdot \mathbf{H}_m + \mathbf{E}_n \cdot (\nabla \times \mathbf{H}_m)$$

a dosazením z Maxwellových rovnic (68) získáme

$$i\omega\mu(\mathbf{H}_m \cdot \mathbf{H}_n - \mathbf{H}_n \cdot \mathbf{H}_m) + i\omega\varepsilon(\mathbf{E}_m \cdot \mathbf{E}_n - \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{E}_m) = 0.$$

(Poznamenejme, že teorém reciprocity představuje jednu z nejobecnějších zákonitostí v elektromagnetickém poli a má řadu bezprostředních důsledků velmi důležitých v technických aplikacích. Tak např. jedním z jeho důsledků je symetrie impedanční resp. admitanční matice lineárních pasivních a reciprokých elektrických obvodů, ale i princip záměnnosti chodu optických paprsků v optice aj.)



Obr. 3. Úsek vlnovodu délky L. Uzavřená plocha uzavírající objem úseku vlnovodu je tvořena úsekem pláště a dvěma průřezy vlnovodu S_1 a S_2 v místech z_1 a z_2.

Integrujme teorém reciprocity (69) přes uzavřený objem tvořený úsekem vlnovodu délky L, viz Obr. 3. Tento integrál musí být zřejmě roven nule. Upravíme-li podle Gaussovy věty levou stranu takto získané rovnice, získáme

$$\oiint_{S^0} (\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n - \mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_m) \cdot d\mathbf{S} = 0, \tag{70}$$

kde S^0 je uzavřená plocha uzavírající úsek vlnovodu mezi souřadnicemi z_1 a z_2, viz Obr. 3. Vzhledem k tomu, že element plochy $d\mathbf{S}$ má v každém bodě směr normály k ploše, na plášti vlnovodu je $d\mathbf{S} = \mathbf{n}^0 dS$, a tedy

$$(\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n - \mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_m) \cdot \mathbf{n}^0 = (\mathbf{n}^0 \times \mathbf{E}_m) \cdot \mathbf{H}_n - (\mathbf{n}^0 \times \mathbf{E}_n) \cdot \mathbf{H}_m = 0,$$

neboť tečné složky intenzity elektrického pole na dokonale vodivém plášti vlnovodu jsou nulové. Rovnici (70) pak můžeme přepsat do tvaru

$$\iint_{S_2} (\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n - \mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_m) \cdot d\mathbf{S} - \iint_{S_1} (\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n - \mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_m) \cdot d\mathbf{S} = 0, \tag{71}$$

kde S_1 a S_2 jsou plochy průřezu vlnovodu v místech z_1 a z_2 podle Obr. 3. Opačná znaménka jsou důsledkem opačného směru elementů $d\mathbf{S}_1$ a $d\mathbf{S}_2$ ploch S_1 a S_2.

Nyní aplikujeme teorém reciprocity na dvojici polí, která odpovídají dvěma různým módům kovového vlnovodu popsaným vektory $\mathbf{E}_m$, $\mathbf{H}_m$ a $\mathbf{E}_n$, $\mathbf{H}_n$. Poněvadž hodnoty polí v místě průřezů S_1 a S_2 se liší pouze exponenciálními faktory $e^{i\beta_m z}$ a $e^{i\beta_n z}$, můžeme vztah (71) s využitím (57) resp. (58) přepsat do tvaru

$$\left[e^{i(\beta_m+\beta_n)z_2}-e^{i(\beta_m+\beta_n)z_1}\right]\iint_S\left(\mathbf{e}_m\times\mathbf{h}_n-\mathbf{e}_n\times\mathbf{h}_m\right)\cdot d\mathbf{S}=0\,, \tag{72}$$

kde S značí plochu průřezu vlnovodu v libovolném místě. Podélné složky vektorů e ani h se ve smíšeném součinu typu $\mathbf{z}^0\cdot\left(\mathbf{e}_m\times\mathbf{h}_n\right)$ neuplatní; platí totiž

$$\mathbf{z}^0\cdot\left(e_{zm}\mathbf{z}^0\times\mathbf{h}_n\right)=\left(\mathbf{z}^0\times e_{zm}\mathbf{z}^0\right)\cdot\mathbf{h}_n=0\,;$$

analogické výrazy platí i pro $h_{zn}\mathbf{z}^0$. V rovnici (72) stačí tedy zachovat jen *příčné složky* polí:

$$\left[e^{i(\beta_m+\beta_n)z_2}-e^{i(\beta_m+\beta_n)z_1}\right]\iint_S\left(\mathbf{e}_{\perp m}\times\mathbf{h}_{\perp n}-\mathbf{e}_{\perp n}\times\mathbf{h}_{\perp m}\right)\cdot d\mathbf{S}=0. \tag{73}$$

Zaměňme nyní *směr šíření* módu s indexem *n*. Tím se změní konstanta šíření β_n na $-\beta_n$. Z obecných výrazů (57) a (58) pro vektory pole vyplývá, že se rovněž změní znaménko vektorů $\mathbf{e}_{\perp n}^{TM}$ a $\mathbf{h}_{\perp n}^{TE}$. V obou případech tedy bude platit podle analogie s (73) vztah

$$\left[e^{i(\beta_m-\beta_n)z_2}-e^{i(\beta_m-\beta_n)z_1}\right]\iint_S\left(\mathbf{e}_{\perp m}\times\mathbf{h}_{\perp n}+\mathbf{e}_{\perp n}\times\mathbf{h}_{\perp m}\right)\cdot d\mathbf{S}=0. \tag{74}$$

Pokud jsou konstanty šíření β_m, β_n různé, jsou faktory v hranatých závorkách vždy nenulové. Musí být proto rovny nule integrály

$$\iint_S\left(\mathbf{e}_{\perp m}\times\mathbf{h}_{\perp n}-\mathbf{e}_{\perp n}\times\mathbf{h}_{\perp m}\right)\cdot d\mathbf{S}=0,\qquad \iint_S\left(\mathbf{e}_{\perp m}\times\mathbf{h}_{\perp n}+\mathbf{e}_{\perp n}\times\mathbf{h}_{\perp m}\right)\cdot d\mathbf{S}=0\,.$$

Jejich součet (resp. rozdíl) dá výsledek

$$\iint_S\left(\mathbf{e}_{\perp m}\times\mathbf{h}_{\perp n}\right)\cdot d\mathbf{S}=0\,, \tag{75}$$

který platí pro libovolnou dvojici módů s různými konstantami šíření. Lze ukázat, že pokud jsou konstanty šíření dvou různých módů shodné (degenerované módy), lze vždy vybrat taková rozložení polí, která rovněž splňují podmínku ortogonality .

Ze vztahů (57) a (58) rovněž vyplývá, že fáze vektorů $\mathbf{e}_\perp$ i $\mathbf{h}_\perp$ jsou v každém bodě příčného průřezu konstantní. Takový vektor je možno vyjádřit součinem reálné vektorové funkce (příčných souřadnic u_1, u_2) s obecně komplexní konstantou. Komplexní konstanta se však ve výrazu pro ortogonalitu neuplatní. Průběhy příčných složek polí můžeme proto považovat za reálné. Platí proto i vztah

$$\iint_S\left(\mathbf{e}_{\perp m}\times\mathbf{h}^*_{\perp n}\right)\cdot d\mathbf{S}=0\,, \tag{76}$$

kde hvězdička značí komplexní sdružení.

Podobně můžeme zobecnit i platnost vztahů (60), (63), (64) a (66) vzhledem k tomu, že příčné resp. podélné složky polí mají vždy stejnou fázi v celém průřezu vlnovodu. Platí tedy vztahy

$$\iint_S \mathbf{e}_j^{TE} \cdot \mathbf{e}_l^{TE*} dS = 0, \qquad \iint_S \mathbf{e}_j^{TM} \cdot \mathbf{e}_l^{TM*} dS = 0, \qquad \iint_S \mathbf{e}_j^{TE} \cdot \mathbf{e}_l^{TM*} dS = 0,$$
$$\iint_S \mathbf{h}_j^{TE} \cdot \mathbf{h}_l^{TE*} dS = 0, \qquad \iint_S \mathbf{h}_j^{TM} \cdot \mathbf{h}_l^{TM*} dS = 0, \qquad \iint_S \mathbf{h}_j^{TE} \cdot \mathbf{h}_l^{TM*} dS = 0. \tag{77}$$

Předpokládejme, že ve vlnovodu se šíří obecná elektromagnetická vlna $\mathbf{E}, \ \mathbf{H}$. Lze ukázat, že z ortogonality a úplnosti souboru vlastních funkcí $\psi_h, \ \psi_e$ vyplývá, že *soubor všech módů vlnovodu tvoří úplný ortogonální systém vektorových funkcí*. Vzhledem k tomu, že prostředí vlnovodu je lineární, platí princip lineární superpozice. Libovolné elektromagnetické pole uvnitř vlnovodu je tedy možno vyjádřit jako lineární superpozici vlnovodných módů:

$$\mathbf{E}(u_1, u_2, z) = \sum_m c_m(z) \mathbf{e}_m^{TE}(u_1, u_2) + \sum_n d_n(z) \mathbf{e}_n^{TM}(u_1, u_2),$$
$$\mathbf{H}(u_1, u_2, z) = \sum_m c_m(z) \mathbf{h}_m^{TE}(u_1, u_2) + \sum_n d_n(z) \mathbf{h}_n^{TM}(u_1, u_2) \tag{78}$$

Střední hodnota energie elektromagnetického pole nahromaděná v úseku vlnovodu mezi souřadnicemi z_1 a z_2 je

$$W = W_e + W_h = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left\{ \int_{z_1}^{z_2} \iint_S \left(\varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* \right) dS dz \right\}; \tag{79}$$

vzhledem ke vzahům ortogonality (77) se tento výraz zredukuje na jednoduchý součet

$$W = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left\{ \int_{z_1}^{z_2} \iint_S \left(\varepsilon \sum_m c_m c_m^* \mathbf{e}_m^{TE} \cdot \mathbf{e}_m^{TE*} + \varepsilon \sum_n d_n d_n^* \mathbf{e}_n^{TM} \cdot \mathbf{e}_n^{TM*} \right) dS\, dz \right\} +$$
$$+ \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left\{ \int_{z_1}^{z_2} \iint_S \left(\mu \sum_m c_m c_m^* \mathbf{h}_m^{TE} \cdot \mathbf{h}_m^{TE*} + \mu \sum_n d_n d_n^* \mathbf{h}_n^{TM} \cdot \mathbf{h}_n^{TM*} \right) dS\, dz \right\},$$

(všimněne si, že pro šířivé módy je $\mathrm{Im}\{\beta\} = 0$; platí tedy

$$W = W_e + W_h = \sum_m \left(W_{e,m}^{TE} + W_{h,m}^{TE} \right) + \sum_n \left(W_{e,n}^{TM} + W_{h,n}^{TM} \right) = \sum_m W_m^{TE} + \sum_n W_n^{TM}. \tag{80}$$

Energie elektromagnetického pole v bezeztrátovém vlnovodu je tedy součtem energií elektromagnetického pole jednotlivých šířivých módů.

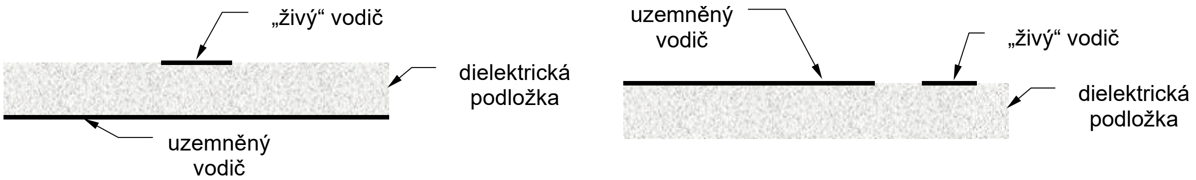
Podobně pro celkový tok výkonu přenášený vlnovodem můžeme psát

$$P = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left\{ \iint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot d\mathbf{S} \right\} =$$
$$= \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left\{ \iint_S \sum_m c_m c_m^* \mathbf{e}_m^{TE} \times \mathbf{h}_m^{TE*} \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \sum_n d_n d_n^* \mathbf{e}_n^{TM} \times \mathbf{h}_n^{TM*} \cdot d\mathbf{S} \right\} = \tag{81}$$
$$= \sum_m P_m^{TE} + \sum_n P_n^{TM}.$$

Celkový tok výkonu elektromagnetického pole ve vlnovodu je roven součtu výkonových toků přeášených jdnotlivými (šířivými) módy.

1.5. Koplanární vedení a jejich analýza metodou konformního zobrazení

V moderní technické praxi se velmi často pro vedení elektromagnetických vln o frekvencích řádu jednotek a desítek GHz využívají různé typy mikropáskových a koplanárních vedení (viz Obr. 4), jejichž rozměry jsou – na rozdíl od kovových vlnovodů – podstatně menší než je vlnová délka elektromagnetického záření, které se v nich šíří.



Obr. 4. Mikrovlnné vedení mikropáskové (vlevo) a koplanární (vpravo).

Exaktní elektromagnetická analýza většiny takových vlnovodných struktur v analytické formě není většinou možná a je třeba použít numerické řešení Maxwellových rovnic. Nehomogenní rozložení permitivity má totiž za následek, že všechny módy (včetně základního) jsou hybridní, tj. mají všechny složky elektrického i magnetického pole obecně nenulové. Určitou představu o chování tohoto módu můžeme získat přibližnou analýzou vycházející z předpokladu, že podélné složky polí **E** i **H** můžeme zanedbat. Jako příklad uvedeme analýzu nesymetrického koplanárního vedení na Obr. 4 vpravo.

Předpokládejme nejprve, že permitivita podložky i okolního prostředí je stejná a označme ji ε. Pak základním módem struktury je mód TEM_{00} jako zvláštní případ módů TM s nulovým mezním kmitočtem. Jak jsme ukázali dříve, jeho rozložení pole je možno vyjádřit vztahy

$$\mathbf{E} = -\nabla_{\perp} V(x,y)\exp(ikz), \qquad \mathbf{H} = Y\mathbf{z}^0 \times \mathbf{E}, \qquad Y = \sqrt{\varepsilon / \mu}\,, \tag{82}$$

kde V je potenciální funkce splňující Laplaceovu rovnici

$$\Delta_{\perp} V = 0\,. \tag{83}$$

Kapacita na jednotku délky vedení je

$$C = \frac{Q}{V_2 - V_1} = \frac{\varepsilon}{V_2 - V_1}\oint_C \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}^0 dl = \frac{\varepsilon}{V_2 - V_1}\oint_C \frac{\partial V}{\partial n} dl\,, \tag{84}$$

kde $V_2 - V_1$ je napětí mezi elektrodami a křivka C obepíná „živý“ vodič. Konstanta šíření je $\beta = k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$.

Z teorie vedení je známo, že je-li C kapacita na jednotku délky a L indukčnost na jednotku délky vedení, je konstanta šíření (napěťové nebo proudové) vlny na vedení rovna $\beta = k = \omega\sqrt{LC}$. Srovnáním obou výrazů pro β získáme pro indukčnost na jednotku délky a charakteristickou admitanci vedení výrazy

$$L = \frac{\mu\varepsilon}{C} = \frac{\mu}{\dfrac{1}{V_2 - V_1}\displaystyle\oint_C \frac{\partial V}{\partial n} dl}, \qquad Y_c = \sqrt{\frac{C}{L}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{1}{V_2 - V_1}\oint_C \frac{\partial V}{\partial n} dl\,. \tag{85}$$

Laplaceovu rovnici můžeme v řadě případů řešit *metodou konformního zobrazení*. Připomeňme stručně její princip: každá funkce komplexní proměnné $w = F(z)$, která je regulární (holomorfní) v určité oblasti roviny komplexních čísel $z = x + iy$, reprezentuje zobrazení z kartézských souřadnic (x, y) na křivočaré souřadnice (u, v) v rovině $w = u + iv$. Podmínka regulárnosti, tj. *existence* derivace funkce komplexní proměnné,

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z + \Delta z)}{\Delta z} \tag{86}$$

vyžaduje, aby derivace nezávisela na směru, jímž se Δz blíží k nule. Srovnáním výrazů pro derivaci pro $\Delta z = \Delta x$ a $\Delta z = i\Delta y$ dostaneme *Cauchyovy-Riemannovy podmínky regulárnosti*

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}, \qquad \frac{du}{dv} = -\frac{dv}{dx}. \tag{87}$$

Tyto podmínky jsou velmi silné a mají pro funkce $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ celou řadu závažných důsledků. Jedním z nich je, že soustava křivočarých souřadnic (u,v) je ortogonální, přičemž Laméovy koeficienty pro obě souřadnice *u* i *v* jsou stejné. Směry souřadnicových os *u* a *v* v bodě (x, y) jsou totiž zřejmě dány vektory $\nabla_\perp u$, resp. $\nabla_\perp v$. Z podmínek (87) bezprostředně plyne

$$\nabla_\perp u \cdot \nabla_\perp v = 0, \tag{88}$$

tj. ortogonalita souřadnic. Pro Laméovy koeficienty platí výrazy

$$h_u = \sqrt{\left(\partial x / \partial u\right)^2 + \left(\partial y / \partial u\right)^2}, \qquad h_v = \sqrt{\left(\partial x / \partial v\right)^2 + \left(\partial y / \partial v\right)^2}. \tag{89}$$

Z existence derivace funkce $F(z)$ plyne existence inverzní funkce $z = F^{-1}(w)$, která je rovněž regulární všude, kromě bodů $F'(z) = 0$. Tato komplexní funkce (určená dvojicí reálných funkcí $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$) musí tedy rovněž splňovat Cauchyovy-Riemannovy podmínky (87), tj.

$$\frac{dx}{du} = \frac{dy}{dv}, \qquad \frac{dx}{dv} = -\frac{dy}{dx} \tag{90}$$

Dosazením do výrazu (89) pro Laméovy koeficienty se snadno přesvědčíme, že $h_u = h_v$.

Funkce *u* i *v* splňují v oblasti své regulárnosti Laplaceovu rovnici,

$$\Delta_\perp u = 0, \Delta_\perp v = 0, \tag{91}$$

což je rovněž bezprostřední důsledek Cauchyových-Riemannových podmínek.

Vraťme se nyní k naší úloze najít potenciální funkci pro dvouvodičové vedení. Poněvadž na vodiči musí být potenciál konstantní, je zřejmé, že podaří-li se najít takové konformní zobrazení $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, které zobrazí jednu z pravoúhlých souřadnic (x, y) na souřadnicové křivky tvořící vodič vlnovodu, je problém vyřešen. Souřadnicová osa *u* je totiž dána podmínkou $v = const.$ a osa *v* podmínkou $u = const.$ Pak lze ztotožnit potenciál *V* s tou z funkcí *u*, resp. *v*, jejíž souřadnicová křivka odpovídá vodiči vlnovodu, a druhá z funkcí popisuje siločáry vektoru intenzity elektrického pole, které jsou k ekvipotenciálním plochám kolmé.

Ukážeme, že výraz pro kapacitu vedení na jednotku délky se při přechodu ze souřadnicové soustavy (x, y) do soustavy (u, v) nemění. Energii elektrického pole vedení můžeme vyjádřit následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2}C(V_2 - V_1) = \frac{1}{2}\iint_S \varepsilon \left|\mathbf{E}\right|^2 dxdy = \frac{1}{2}\varepsilon\iint_S \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] dxdy = \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon\iint \left|\nabla_\perp V\right|^2 dS = \frac{1}{2}\varepsilon\iint_S \left[\left(\frac{\partial V}{h_u \partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{h_v \partial v}\right)^2\right] h_u h_v dudv = \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon\iint_S \left[\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2\right] dudv, \end{aligned} \tag{92}$$

neboť podle (89) jsou oba Laméovy koeficienty stejně velké. Je tedy lhostejné, zda kapacitu vedení spočítáme v rovině z nebo w; volíme obvykle tu soustavu, kde je výpočet jednodušší.

Analýza koplanárního vedení

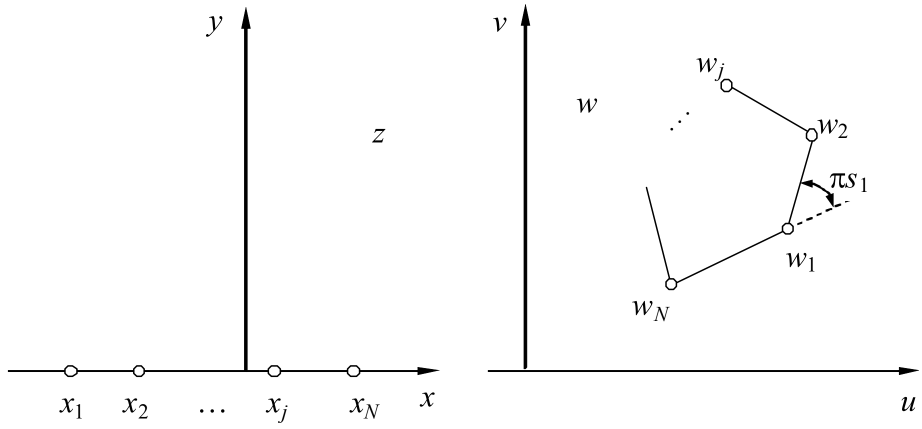
Obecný postup, jak najít vhodné konformní zobrazení pro určitý typ vedení, neexistuje. Výjimkou jsou některé typy koplanárních vedení, pro něž můžeme najít vhodné konformní zobrazení pomocí tzv. Schwarzova-Christoffelova integrálu

$$w = A\int \prod_{j=1}^{N} (z - x_j)^{-s_j} dz + B, \qquad \sum_{j=1}^{N} s_j = 2. \tag{93}$$

Integrál na levé straně vyjadřuje funkci komplexní proměnné z, regulární v celé komplexní rovině s výjimkou bodů $z = x_j$ ležících na reálné ose. Konstanty s_j jsou reálná čísla, jejichž součet musí být roven 2. Pro derivaci funkce w zřejmě platí

$$\frac{dw}{dz} = A\prod_{j=1}^{N} (z - x_j)^{-s_j}. \tag{94}$$

Ukážeme, že konformní zobrazení (93) zobrazuje horní polorovinu $y > 0$ komplexní roviny z na vnitřek uzavřeného polygonu o N vrcholech w_j odpovídajících bodům x_j transformovaným do roviny w, viz Obr. 5.



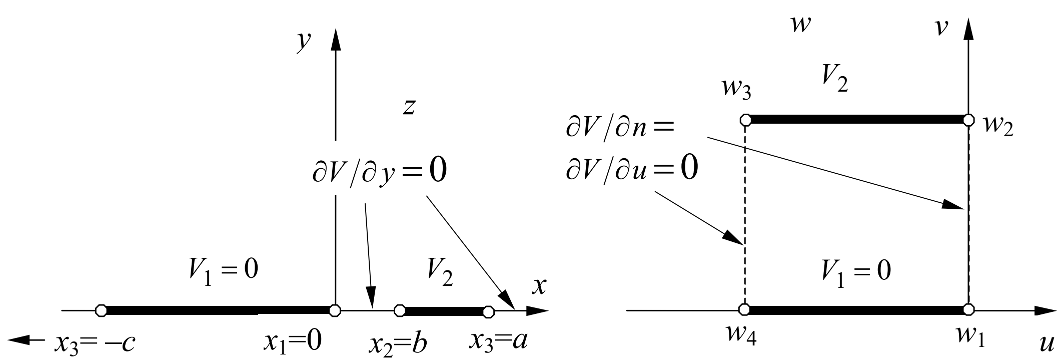
Obr. 5. Konformní zobrazení Schwarzovým-Christoffelovým integrálem.

Pro všechny body $z = x < x_j$ na reálné ose v rovině z je argument komplexního čísla $(z - x_j)^{-s_j}$ ve výrazu (94) pro derivaci funkce $w(z)$ zřejmě roven πs_j, neboť $z - x_j$ je reálné záporné číslo, jehož argument je $-\pi$. Pro $z = x > x_j$ je $z - x_j$ kladné a argument výrazu $(z - x_j)^{-s_j}$ je nulový. V každém vrcholu polygonu se tedy argument derivace dw / dz mění skokem o úhel πs_1. Požadavek $\sum_{j-1}^{N} s_j$ znamená, že součet všech vnějších úhlů polygonu v rovině w je 2π a polygon je tedy uzavřený.

Schwarzův-Christoffelův integrál (93) aplikujeme na asymetrické koplanární vedení podle Obr. 6. Horní polorovina $y > 0$ se transformuje na vnitřek obdélníku v rovině w transformací konformním zobrazením

$$w = A\int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{z'(z'-b)(z'-a)(z'+c)}} + B; \tag{95}$$

poněvadž jde o obdélník, zřejmě $k_j = 1/2$ pro všechna $j = 1, 2, 3, 4$.



Obr. 6. Asymetrické koplanární vedení a jeho obraz.

Z požadavku, aby $w = w_1 = 0$ pro $z = x_1 = 0$, plyne $B = 0$. Úlohu dále zjednodušíme předpokladem, že zemní elektroda koplanárního vedení je polonekonečná, $c \to \infty$. Pro všechna konečná z' z horní poloroviny můžeme pak člen $z' + c$ pod odmocninou ve jmenovateli výrazu (95) nahradit konstantou c, a provést záměnu v označení multiplikativní konstanty, $A/\sqrt{c} \to A$. Konformní zobrazení je pak dáno jednodušším vztahem

$$w = A\int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{z'(z'-b)(z'-a)}}. \tag{96}$$

Záměnou integrační proměnné $z'/b = \lambda^2$, $dz' = 2b\lambda d\lambda$ získáme

$$w = A'' \int_0^{\sqrt{z/b}} \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-\frac{b}{a}\lambda^2)}}, \qquad A'' = 2\,A/\sqrt{a}\,, \tag{97}$$

Tento integrál můžeme vyjádřit pomocí inverzní eliptické funkce $\mathrm{sn}^{-1}(\zeta,k)$

$$\mathrm{sn}^{-1}(\zeta,k) = \int_0^{\zeta} \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}}, \qquad k = \sqrt{\frac{b}{a}} \tag{98}$$

jako

$$w = A''\mathrm{sn}^{-1}\left(\sqrt{\frac{z}{b}}, \sqrt{\frac{b}{a}}\right). \tag{99}$$

Funkce $\zeta = \frac{1}{A''}\mathrm{sn}\left(w, k\right)$ je periodická v proměnných *u* i *v* s periodou $-w_4$ resp. $w_2 = iv_2$. Lze ukázat, že dolní polorovina *z* se transformuje v obdélník symetrický s obdélníkem (w_1, w_2, w_3, w_4) vůči ose symetrie *v*. Vzhledem k tomu jsou tedy křivky $v = const.$ ekvipotenciání plochy a $u = const.$ jsou siločáry intenzity elektrického pole. Hodnota iv_2 odpovídající v rovině *z* bodu *b* je podle (98) a Obr. 6 dána výrazem

$$w_2 = iv_2 = A''K(k), \tag{100}$$

kde

$$K(k) = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}} \tag{101}$$

je tzv. úplný eliptický integrál 1. druhu, který je tabelován a existují pro něj velmi přesné aproximativní formule.

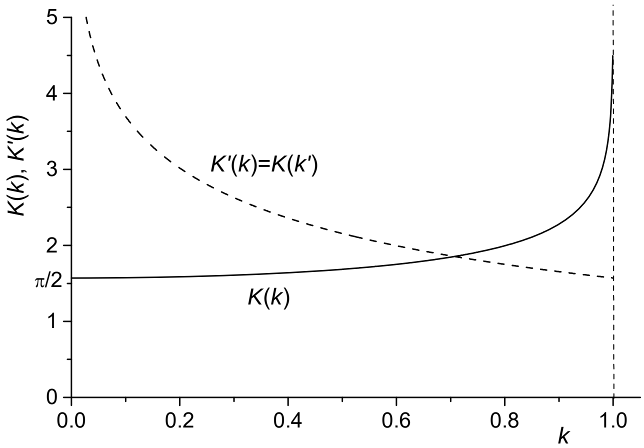
Hodnotu w_3 získáme podle vztahu (97) výpočtem

$$w_3 - w_2 = A'' \int_1^{\sqrt{a/b}} \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}} = iA'' \int_1^{\sqrt{a/b}} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2-1)(1-k^2\lambda^2)}} = iA''K'(k), \tag{102}$$

kde

$$K'(k) = \int_1^{1/k} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2-1)(1-k^2\lambda^2)}} \tag{103}$$

je tzv. úplný eliptický integrál druhého druhu.



Obr. 7. Průběh úplného eliptického integrálu prvého a druhého druhu

Graf na obr. Obr. 7 ukazuje průběh závislosti úplných eliptických integrálů prvého i druhého druhu na parametru *k*. Substitucí $(\lambda')^2 = (1-k^2\lambda^2)\big/(1-k^2)$ lze ukázat, že

$$K'(k) = \int_0^1 \frac{d\lambda'}{\sqrt{(1-\lambda'^2)[1-(1-k^2)\lambda'^2]}} = K(\sqrt{1-k^2}) = K(k'), \;\; k' = \sqrt{1-k^2}\,. \tag{104}$$

Pak dostaneme s uvážením vztahu (100)

$$w_3 - w_2 = iA'' K(k') = -v_2 \frac{K(k')}{K(k)}. \tag{105}$$

Kapacita horní poloroviny vedení v rovině *w* na jednotku délky vedení je tedy

$$C' = \varepsilon \frac{(w_2 - w_3)}{v_2} = \varepsilon \frac{K(k')}{K(k)} = \varepsilon \frac{K(\sqrt{1-k^2})}{K(k)}, \tag{106}$$

kapacita celého koplanárního vedení (v homogenním dielektriku) na jednotku délky je tedy

$$C = 2\varepsilon \frac{K(k')}{K(k)}, \qquad k = \sqrt{\frac{b}{a}}\,. \tag{107}$$

Indukčnost na jednotku délky je pak

$$L = \frac{\mu\varepsilon}{C} = \frac{\mu}{2} \frac{K(k)}{K(k')}, \tag{108}$$

a charakteristická impedance vedení je tedy

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{C} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{K(k')}{K(k)}. \tag{109}$$

Položíme-li napětí na vedení rovno $v_2 = U$, pak podle (100) platí $A'' = \dfrac{iU}{K(k)}$, a konformní zobrazení (96) můžeme psát ve tvaru

$$w = u + iv = \frac{i\sqrt{a}}{2}\frac{U}{K(k)}\int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{z'(z'-b)(z'-a)}}. \tag{110}$$

(Příčné) složky intenzity elektrického pole jsou dány obecným výrazem (82):

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Im}\{w\} = - - \mathrm{Im}\left\{\frac{\partial w}{\partial z}\right\}, \\ E_y &= -\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = -\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial w}{\partial z}\right\}. \end{aligned} \tag{111}$$

Poněvadž

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{i\sqrt{a}}{2}\frac{U}{K(k)}\frac{1}{\sqrt{z(z-b)(z-a)}}, \quad z = x + iy\,, \tag{112}$$

získáme pro rozložení intenzity elektrického pole v koplanárním vedení explicitní výrazy

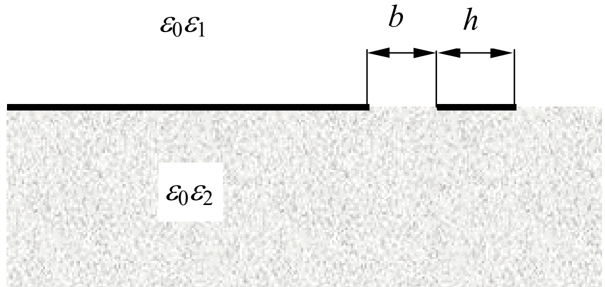
$$E_x(x,y) = -\frac{\sqrt{a}}{2}\frac{U}{K(k)}\mathrm{Re}\frac{1}{\sqrt{z(z-b)(z-a)}}, \qquad E_y(x,y) = \frac{\sqrt{a}}{2}\frac{U}{K(k)}\mathrm{Im}\frac{1}{\sqrt{z(z-b)(z-a)}}\,. \tag{113}$$

Složky intenzity magnetického pole jsou pak podle vztahu $\mathbf{H} = Y\mathbf{z}^0 \times \mathbf{E} = \sqrt{\varepsilon/\mu}\,\mathbf{z}^0 \times \mathbf{E}$

$$H_x = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_y, \qquad H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_x. \tag{114}$$

Koplanární vedení s děleným dielektrikem

Výše uvedená analýza nesymetrického koplanárního vedení platí přesně pro vedení tvořené dvěma vodiči s nekonečně velkou vodivostí, nekonečně malé tloušťky, v homogenním dielektriku o permitivitě ε. Skutečné koplanární vedení je však zpravidla vytvářeno na dielektrické podložce podle Obr. 4 vpravo kovovými vrstvami konečné tloušťky i vodivosti. Pro takové vedení naše analýza neplatí. Zanedbáme konečnou tloušťku kovu, budeme předpokládat nekonečnou vodivost kovu, ale pokusíme se řešit problém různých dielektrických materiálů nad a pod elektrodami v různých polorovinách vedení podle Obr. 8.



Obr. 8. Koplanární vedení s děleným dielektrikem

Označme relativní permitivitu horního prostředí ε_1 a dolního prostředí ε_2. Oznčíme dále štěrbinu mezi vodiči symbolem *b* a šířku „živého“ vodiče *h*. V každé polorovině můžeme použít konformní zobrazení odvozené výše, s parametrem $k = \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{b}{b+h}}$. Poněvadž rozhraní představuje pro elektrické pole rovinu symetrie, v nepokovených místech rozhraní je $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ a $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ je spojité nad i pod rozhraním, intenzita elektrického pole má nad i pod rozhraním identický průběh. Celková kapacita vedení je tedy rovna součtu kapacit obou polorovin (celková elektrická energie $W_e = \frac{1}{2}CU^2$ je rovna součtu energií v obou polorovinách při identickém potenciálovém rozdílu mezi elektrodami, tj.

$$C = C_1 + C_2 = \varepsilon_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{K(k')}{K(k)}. \tag{115}$$

Indukčnost dvouvodičového vedení daná výrazem (108) nezávisí na permitivitě prostředí a je tedy stejná. Srovnáním s kapacitou ‘ekvivalentního‘ vedení s homogenním dielektrikem o „efektivní“ permitivitě ε_{eff},

$$C = 2\varepsilon_0\varepsilon_{eff}\frac{K(k')}{K(k)}, \tag{116}$$

získáme pro efektivní permitivitu výraz

$$\varepsilon_{eff} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \tag{117}$$

Konstantu šíření základního módu „kvazi“-TEM můžeme pak aproximovat výrazem

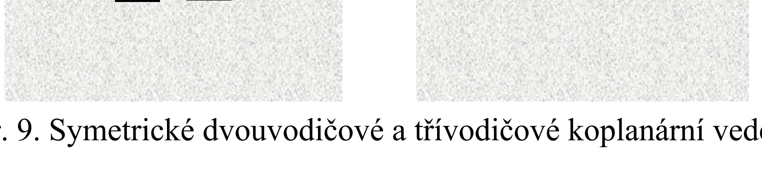
$$\beta \approx \omega\sqrt{LC} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_{eff}} \tag{118}$$

a charakteristickou impedanci vedení vztahem

$$Z_c \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0\varepsilon_{eff}}}\frac{K(k)}{K(k')}. \tag{119}$$

Rozložení intenzity elektrického pole je určené potenciální funkcí $v(x,y)$ a je tedy symetrické vůči rozhraní. Magnetické pole je určeno výrazy (114). Poněvadž složka E_x je na rozhraní spojitá a relativní permitivita se v jednotlivých polorovinách liší, jsou podle tohoto vztahu normálové složky intenzity magnetického pole H_y (a pro nemagnetické prostředí tedy i složky magnetické indukce B_y) *různé*. Tento rozpor je důsledkem pouze přibližné platnosti našeho rozboru. V praxi se ukazuje, že aproximativní řešení platí s přijatelnou chybou,pokud rozměry vedení (*a*, *b*) jsou malé ve srovnání s vlnovou délkou záření, které se podél vedení šíří. Konstanta šíření i charakteristická impedance vedení se tak stává závislou na frekvenci přenášeného záření, tj. vedení je disperzní.

Konformním zobrazením založeném na inverzní eliptické funkci (99) je možno stejně jednoduše řešit nejen nesymetrické, ale i symetrické dvouvodičové a třívodičové koplanární vedení s polonekonečnými vnějšími elektrodami znázorněné na Obr. 9.



Obr. 9. Symetrické dvouvodičové a třívodičové koplanární vedení.